Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Michal Búzik

Matematická teorie žonglování

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: MDUZV

Praha 2012

Rád by som poďakoval vedúcemu mojej bakalárskej práce RNDr. Antonínovi Slavíkovi, Ph.D. za podporu pri výbere témy a najmä za cenné rady a pripomienky pri vypracovaní.

Prehlasujem, že som túto bakalársku prácu vypracoval samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov, literatúry a ďalších odborných zdrojov.

Beriem na vedomie, že sa na moju prácu vzťahujú práva a povinnosti vyplývajúce zo zákona č. 121/2000 Zb. autorského zákona v platnom znení, najmä skutočnosť, že Univerzita Karlova v Prahe má právo na uzavretie licenčnej zmluvy o užití tejto práce ako školského diela podľa §60 odst. 1 autorského zákona.

V . . . . dňa . . . .

Názov práce: Matematická teorie žonglování

Autor: Michal Búzik

Katedra / Ústav: Katedra didaktiky matematiky

Vedúci bakalárskej práce: RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.

Abstrakt: Bakalárska práca pojednáva o spôsoboch matematického popisu žonglovania. Prioritná časť sa venuje zápisu simulácie vyhadzovania loptičiek pomocou celočíselných postupností, takzvaných siteswapov. Poukazuje na ich vytváranie, vzájomne vzťahy a spôsoby grafického zobrazenia v diagramoch. Na základe obmedzujúcich aspektov sú zhrnuté výsledky výpočtov všetkých možností žonglovacích postupností a zovšeobecnenie týchto poznatkov. Okrem využitia kombinatoriky a teórie grafov sú popísané aj vzťahy medzi žonglovaním a teóriou uzlov, či change ringing.

Kľúčové slová: žonglovanie, postupnosť, siteswap

Title: The mathematical theory of juggling

Author: Michal Búzik

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.

Abstract: This bachelor thesis is concerned with methods of mathematical description of juggling. The main part deals with notation of simulation of throwing balls using integer sequences, so-called siteswaps. It indicates generating, mutual relations and ways of graphic interpretation of these sequences in diagrams. Summarized results with generalization of all possible calculations of juggling sequences according to restrictive aspects are provided in this thesis. Beside usage of combinatorics and graph theory, there are also relations between juggling and braid theory, and change ringing interpreted.

Keywords: juggling, sequence, siteswap

Obsah

Úvod

Žonglovanie je súhrnom množstva rôznych pohybov. Pre laika, na prvý pohľad, veľmi chaotických, avšak každý skúsený žonglér v nich zhliada harmóniu. Cieľom bakalárskej práce je odhaliť čitateľovi matematické zákonitosti žonglovania a bližšie ho oboznámiť s výsledkami tejto relatívne modernej teórie.

V prvej kapitole uvádzame stručný prierez histórie žonglovania, od prvých historických zmienok, až po dnešné využitie, nie len v kultúrnom živote, ale i v aplikáciách v rozličných vedeckých odvetviach. Nevynímajúc samozrejme prehľad vývoja matematiky žonglovania.

Prevažnú časť textu zaberá podrobne rozobratý zápis pomocou celočíselných postupností pre našu definíciu modelu žonglovania . Pre lepší prehľad podávame množstvo ozrejmujúcich príkladov bežne používaných v praktickom žonglovaní. Následne poukazujeme na vlastnosti týchto postupností a spôsoby ich vytvárania, využívajúc pri tom grafické znázornenie[1] na štandardných diagramoch. Zavádzame zobrazenie na cyklickom diagrame vhodnom práve pre účely matematické. Po zavedení takéhoto popisu sa vynára neodmysliteľná úloha výpočtu všetkých možností takéhoto žonglovania. Na riešenia v závislosti od rôznych obmedzujúcich faktorov využívame princíp takzvaných žonglovacích kariet. Výsledky generalizujeme pre menej striktné vlastnosti pôvodného modelu na multiplexový štýl žonglovania (vyhadzovanie viacerých predmetov z jednej ruky naraz) a žonglovanie pre väčšie množstvo rúk.

Podávame základný popis uniformného žonglovania. Tento princíp používa reálnejší model, vhodný pre kybernetiku. V závere si ešte stručne zhrnieme vzťah medzi žonglovaním a teóriou uzlov a teóriou zvonenia zmien v britských kostoloch.

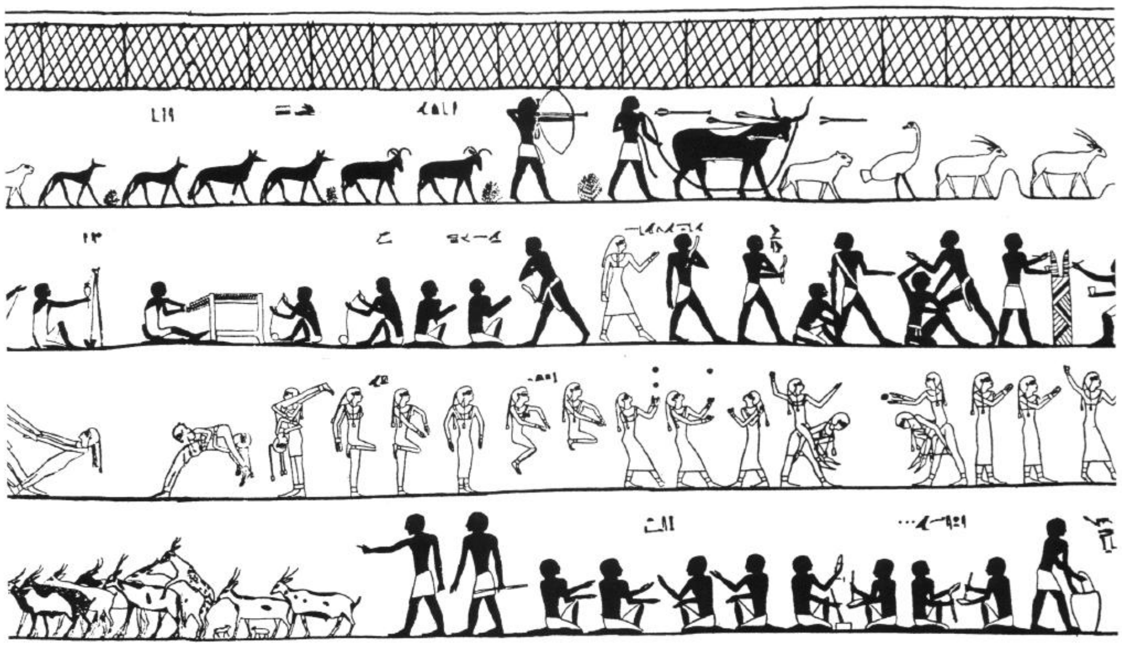
Motiváciou k vypracovaniu tejto práce bolo osobné zanietenie v žonglovaní i matematike. Po jej prečítaní snáď nikomu nepríde zvláštne, že mnohí žongléri našli vďaka tejto teórii záľubu v matematike, nehovoriac o mnohých veľkých matematikoch, pre ktorých je žonglovanie okrem popísateľného javu aj uvoľňujúce hobby.

[1]Na tvorbu diagramov bol použitý software *Wolfram Mathematica 8 for Students*, viď Príloha A

A rovnako ako matematici vďaka žonglovaniu spísali nové vety a prehĺbili tým kombinatoriku, algebru, teórie grafov, či pravdepodobnosti, tak aj žongléri vďaka žonglovacím postupnostiam odhalili nové triky a tréningové metódy. Pri výuke žonglovania je tiež možné zábavnou a hravou formou aplikovať rozličné matematické princípy od tých základných až po zložitejšie teórie.

1 História žonglovania

Človek sa odjakživa vo svojom kultúrnom i náboženskom živote stretával s rôznymi druhmi umeleckého prejavu. Spoločenské udalosti: oslavy a rôzne obrady, sú v každej komunite rozličné, líšiac sa práve umeleckou osobitosťou danej skupiny. Či už hovoríme o vyjadrení hudbou, spevom, pohybom, grafickými prvkami, textom alebo akýmkoľvek iným umením, častokrát je jedným zo základných prvkov tohto prejavu rytmus. Práve v spojení s hudobným rytmom môžeme hľadať prvopočiatky



Obr. 1: Prvá historická zmienka o žonglovaní Juggler's World: Vol. 38, No. 2

Zdroj: http://www.juggling.org/jw/86/2/Pics/egypt-big.gif

žonglovania ako pohybu, nie len svojím telom, ale aj ako pohybu s nejakým objektom. Pojem žonglovanie je už dnes chápaný v našom jazyku omnoho širšie ako jeho lexikálna definícia, ktorá hovorí, že to je veľmi zručné vyhadzovanie a chytanie rozličných predmetov. Pod žonglovaním si predstavujeme akúkoľvek umeleckú manipuláciu s ďalším predmetom, alebo viacerými predmetmi.

Prvú historickú zmienku (Obrázok 1) o žonglovaní zaznamenávame z nástenných obrazov pätnástej hrobky neznámeho princa v oblasti Beni Hassan v Egypte z obdobia medzi 1994-1781 p.n.l. Historický vývoj žonglovania výrazne ovplyvnil orient. V Číne sa žonglérska kultúra spočiatku spája s oslavami bojov medzi kmeňmi a lovu zvery. Neskôr sa šírením taoizmu a konfucionizmu výrazne rozširuje aj do okolitých krajín. Častokrát bolo k rôznym rituálom používané jedinečné žonglérske náčinie. Otroci z orientu boli dovážaní aj do Rímskej ríše pre pobavenie publika. V upadnutej stredovekej Európe bolo mnoho umení, medzi nimi aj žonglovanie, zakazovaných kresťanskou cirkvou. Koncom stredoveku sa však znova objavujú zmienky o žonglovaní z rôznych krajín Európy. Začali vznikať bratsvá a neskôr tulácke spoločnosti, ktoré putovným spôsobom predvádzali svoje umenie. Druhá polovica sedemnásteho storočia znamená pre umelecký svet vznik cirkusu v Británii a parížskeho varieté. Až donedávna bolo žonglovanie považované výhradne za cirkusovú zručnosť. Dnes je využívané najmä v komplexnejšom umeleckom celku - v žánri, ktorý nazývame nový cirkus.

V modernej dobe je žonglovanie, čím ďalej, tým viac rozšírené ako voľnočasová aktivita, ktorá podnecuje osobný duchovný aj fyzický rozvoj. Môžeme deliť žonglovanie na umelecké - vyjadrujúce emócie, pocity a športové, kde sa človek snaží o čo najväčšiu technickú precíznosť s veľkým počtom predmetov. Výskumy žonglovania ukazujú jeho priaznivé účinky na človeka z mnohých hľadísk. Významné aplikácie nájdeme napríklad v psychológii, pedagogike, či medicíne. V technických vedách je skúmanie pohybu predmetov počas žonglovania prínosné pre fyziku. Spomeňme napríklad elektrotechnickú fakultu, ČVUT v Prahe, ktorá vyvinula mechanického žongléra. Oblasťou matematického skúmania sú dnes najmä algebraické a kombinatorické aspekty súvisiace s rytmom pri žonglovaní.

Priekopníkom z oblasti matematicko-fyzikálneho výskumu žonglovania je Claude Shannon, jeden z najvýznamnejších vedcov minulého storočia. Zostavil prvého žonglovacieho robota. Pri popise rôznych fáz žonglovania nachádza princíp duality v uniformnom žonglovaní a spisuje tri matematické vety. Výraznou osobnosťou je tiež Ronald Graham, bývalý prezident Medzinárodnej žonglérskej asociácie ako aj Americkej matematickej spoločnosti, ktorý napísal a spolupracoval na množstve matematických textov venujúcich sa matematickým teóriám v žonglovaní. V polovici deväťdesiatych rokov devätnásteho storočia bol vynájdený siteswapový zápis. Hneď tri rôzne skupiny nezávisle na sebe objavili zápis žonglovania ako postupnosti čísel, v závislosti na konštantom rytme. Boli nimi Paul Klimak zo Santa Cruz, Bent Magnusson a Bruce "Boppo" Tiemann z Los Angeles - Caltech v USA a Adam Chalcraft, Mike Day a Colin Wright z Cambridge v Anglicku (niekde sa uvádza aj cambridgeský zápis). Práve tento prístup je dnes medzi žonglérmi populárny a bude sa mu venovať prevažná časť práce. Rozšírenie siteswapového zápisu o stavové diagramy, súvisiace najmä s prechodmi medzi trikmi doplnil Jack Boyce. S rozvojom informatiky boli vytvorené aj prvé simulátory žonglovania od Bengta Magnussona, Eda Carstensa, Jacka Boyca, Kena Matsuoku a mnohých ďalších. Dnes sa medzi matematikmi a informatikmi nájde veľké množstvo priaznivcov, ktorí posúvajú teoretické zázemie matematiky žonglovania vpred a odhaľujú tak nové zákonitosti a aplikácie všeobecnejších matematických teórií.

S históriou žonglovania sa môžu záujemcovia o túto tému bližšie zoznámiť napríklad v knihe ZIETHEN (11), či online LEWBEL (5).

2 Siteswapový zápis

Napriek tomu, že pojem žonglovanie chápeme obšírnejšie, jeho matematické skúmanie viac odpovedá pôvodnej definícii vyhadzovania väčšieho počtu predmetov. Nie však úplne, nakoľko budeme popisovať aj žonglovanie s jedným, s dvoma, alebo dokonca so žiadnym objektom v triviálnom prípade. Za objekt si zvolíme loptičku, akýkoľvek iný predmet by vlastnosti popisu nezmenil. Zavedieme si teda ideálny matematický model, v ktorom budeme veľké množstvo fascinujúcich žonglérskych kúskov vynechávať. Žonglér bude vyhadzovať a chytať loptičky vždy z rovnakého miesta v priestore a budeme sa vyhýbať rozdielnosti pri hodoch za chrbtom, popod nohu a podobne. Celý priebeh žonglovania zapíšeme postupnosťou, z ktorej vieme jednoznačne zistiť o aké žonglovanie ide, aký vzor žonglér hádže a počet loptičiek v danom žonglovaní. Každý člen postupnosti bude popisovať hod loptičky a pozícia tohto členu bude označovať daný úder - moment v čase. Pre jednoduchosť zavedieme čas na vyhodenie, chytenie a čas medzi chytením a následným vyhodením ako nulový. Hody sú vykonávané vždy v nejaký časový moment, ktorý nazveme úder. Zaujímavým pozorovaním je, že medzi jednotlivými údermi vo všeobecnosti nemusí byť rovnaký časový rozdiel. My však tento časový rozdiel budeme pre zjednodušenie považovať za konštantnú jednotku času. Tento princíp je veľmi prirodzený a názorný, ukážeme si, že žongléri tak napríklad číslom 3 vyjadrujú klasickú kaskádu s tromi loptičkami.

Definícia 2.1. Každému hodu priradíme číslo $h \in \mathbb{N}_0$ tak, že h označuje počet úderov v čase, za ktoré loptička dopadne. Číslo h nazveme *výška hodu*.

Výška hodu $h = 1$ teda znamená, že loptička dopadne za 1 úder. Výška hodu 0 znamená, že žiadna loptička v ruke nie je (nedopadla) a preto sa nevykoná žiaden hod na daný úder.

Akékoľvek ďalšie fyzikálne javy ako ozajstná výška hodu a rýchlosť loptičky, nás nebudú zaujímať a vplyvy ako gravitačné zrýchlenie a podobne budeme zanedbávať.

Navyše budeme predpokladať, že žonglér vždy žongloval a bude žonglovať do nekonečna. Predídeme tak nepríjemnostiam pri začiatku a konci žonglovania, keď má žonglér v rukách viac loptičiek. Definície a vety tejto kapitoly sa opierajú predovšetkým o článok BUHLER - EISENBUD - GRAHAM - WRIGHT (2) a publikáciu POLSTER (8).

2.1 Prosté žonglovanie

Pre jednoduchosť začneme s popisom žonglovania, pri ktorom žonglér vždy vyhodí nanajvýš jednu loptičku na každý úder. Takéto žonglovanie nazveme prosté.

Definícia 2.2. Vlastnosti prostého žonglovania:

(i) Loptičky sú žonglované do konštantných úderov, a teda začiatky hodov odpovedajú diskrétnym momentom v čase.

(ii) Uvažujeme, že žonglér vždy žongloval a nikdy neprestane.

(iii) Na každý úder je chytená a hodená najviac jedna loptička. Ak je loptička chytená, je následne aj hodená.

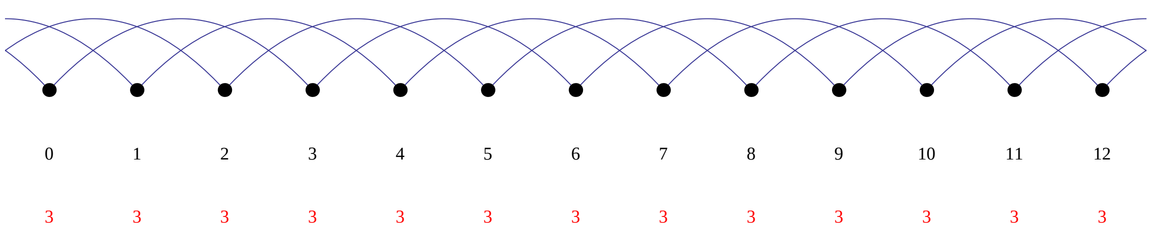
V tomto okamihu je vhodné si uvedomiť, že nami popísané žonglovanie je nezávislé na počte rúk. Môžeme predpokladať, že žonglér vyhadzuje každú loptičku z jednej a tej istej ruky. Tohto predpokladu sa môžeme držať pri siteswapovom zápise prostého a multiplexového žonglovania. Bežný žonglér však žongluje dvomi rukami a preto je pre názornosť dobré si predstaviť, že na každý úder vyhadzujeme z inej ruky. Pri hode o nepárnej výške teda vyhadzujeme loptičku z jednej ruky a po danom počte úderov dopadne do ruky druhej. Naopak pri párnych výškach hodov vyhadzujeme i chytáme loptičku do rovnakej ruky. Žonglovaniu, pri ktorom záleží na počte rúk sa budeme venovať v práci neskôr.

2.2 Žonglovacia postupnosť a funkcia

Žongléri obyčajne popisujú siteswapmi jednotlivé triky - vzory. Siteswap je jednoduchá postupnosť výšok hodov[2] a skúsení žongléri dokážu v mysli, v priebehu žonglovania, bez problémov skladať tieto postupnosti čísel za sebou tak, ako im to vyhovuje. Na druhú stranu, vznik siteswapov podnietil vývoj nových trikov v žonglovaní. Taktiež je tento popis prínosný pri tréningu, pretože žonglér, uvedomujúc si rytmus dokáže časom pomerne presne hodiť konkrétnu „výšku“. Napríklad sa pri žonglovaní so štyrmi loptičkami môže učiť hody pre šesť loptičiek. Ukážeme si ako sa takáto postupnosť konštruuje a čo pre ňu musí platiť aby spĺňala jednotlivé podmienky žonglovania. Následne si vyjadríme počet loptičiek, s ktorými žonglujeme pri danej postupnosti. Na jednoduchom diagrame si znázorníme priebeh žonglovania.

Vezmime si konštantnú postupnosť hodov o výške 3 na každý úder. (Obrázok 2)

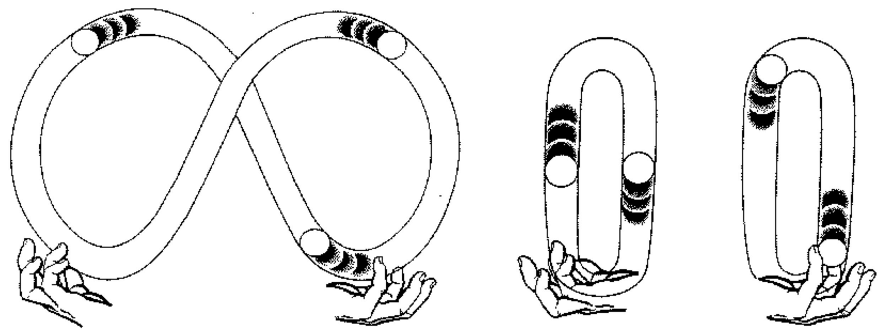
$$\ldots 333333 \ldots$$



Obr. 2: Kaskáda s tromi loptičkami

Každá loptička, ktorá dopadne je znovu vyhodená a dopadne za 3 údery. V žonglovaní tejto postupnosti sú 3 loptičky, pretože medzi vyhodením a dopadom jednej loptičky prebehnú 2 ďalšie údery, na ktoré dopadnú a do výšky 3 budú vyhodené

[2]V žonglovaní sa výšky hodov väčšie ako 9 obyčajne označujú malými písmenami latinskej abecedy (10=a, 11=b, ...). Je to z toho dôvodu, že napríklad číslo 11, by sme mohli interpretovať v postupnosti ako dva hody o výške 1, preto miesto 11 píšeme b. Hody, ktoré by presiahli abecedu sa zvyčajne nevyskytujú v reálnych prípadoch. Táto konvencia platí aj pre žonglérsky software.



Obr. 3: Kaskáda s 3 a fontána so 4 loptičkami, pri pohľade na žongléra spredu.

Zdroj: www.cecm.sfu.ca/organics/papers/buhler/paper/html/

2 loptičky. Konštantnú postupnosť o výške všetkých hodov n nazývame *triviálna* a číslo n zároveň odpovedá počtu loptičiek v našom žonglovaní.

Žongléri nazývajú takéto žonglovanie pre nepárne výšky hodov *kaskáda*[3] a pre párne výšky *fontána*[4] (Obrázok 3). Plynie to z toho, že pri žonglovaní dvomi rukami sa na každý úder strieda ruka, z ktorej loptičky vyhadzujeme. Pri *kaskáde* žonglér hádže loptičky oblúkmi vždy do druhej ruky a pri *fontáne* dopadne loptička do ruky, z ktorej bola vyhodená. *Kaskáda* je prvý žonglérsky vzor, ktorý sa učia začínajúci žongléri. Taktiež vždy, keď sa žonglér pri svojom tréningu učí viac loptičiek, začína *kaskádou* alebo *fontánou*.

Doporučujeme čitateľovi použiť software *Juggling Lab* [5], ktorý okrem iného simuluje žonglovanie vstupnej postupnosti.

Konštrukciu žonglovacej funkcie a žonglovacej postupnosti vytvoríme na konkrétnom netriviálnom príklade (Obrázok 4).

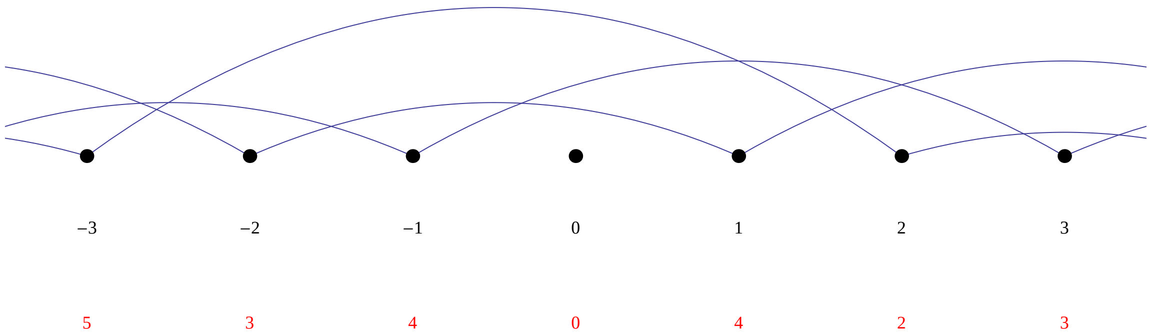
Vezmime si postupnosť celých čísel, ktorá bude označovať údery v čase:

$$-\infty, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$$

[3] Príloha A - /siteswapy/01_kaskada.jml

[4] Príloha A - /siteswapy/01_fontana.jml

[5] *Juggling Lab* je priložený na CD médiu, viď Príloha A, alebo je možné ho spustiť online na http://jugglinglab.sourceforge.net/. V tom prípade odporúčame čitateľovi vybrať „Full Applet“, do poľa „Pattern“ sa vkladá žonglovacia postupnosť



Obr. 4: Graf prostého žonglovania

Každému úderu priradíme výšku hodu h_i tak, aby boli splnené vlastnosti prostého žonglovania. Vlastnosti (i) a (ii) sú splenené automaticky a predpokladajme, že na údery $-3, -2, -1$ dopadne vždy jedna loptička z predošlého žonglovania, zároveň na údery $0, 1, 2$ a 3 nedopadne z predošlého žonglovania žiadna loptička. Úderu -3 môžeme priradiť ľubovoľnú výšku hodu tak, aby bola splnená vlastnosť (iii) prostého žonglovania. Pre daný úder nám z predpokladov vyplýva, že loptička nesmie dopadnúť na úder -2 a -1. Priraďme mu teda výšku hodu $h_{-3} = 5$. To znamená, že loptička práve vyhodená následne dopadne na úder 2 a pri ďalšom postupovaní vo vytváraní žonglovacej postupnosti musíme dbať na to, aby na úder 2 nedopadla ďalšia loptička z nasledujúcich hodov. Pre úder -2 môžeme voliť ľubovoľnú výšku hodu $h_{-2} \neq 1, 4$, napríklad $h_{-2} = 3$. Za tri údery, teda na úder 1, dopadne práve vyhodená loptička a voľby ďalších hodov budú obmedzené tak, aby na úder 1 nedopadla ďalšia loptička. Na úder -1 nám podľa predpokladu dopadne ďalšia loptička, voľme výšku hodu $h_{-1} \neq 2, 3$, napríklad $h_{-1} = 4$. Na úder 3 nám dopadne práve vyhodená loptička. Na úder 0 nedopadne žiadna loptička. Predpokladali sme, že z predošlého žonglovania nám žiadna loptička na úder 0 nedopadne a každý z hodov na údery $-3, -2$ a -1 sme zvolili tak, že loptička dopadne na iný úder. h_0 teda musí byť rovné nulovému hodu. Na údery 1,2 a 3 nám postupne dopadne vždy jedna loptička a môžeme pokračovať v konštrukcii žonglovania podľa predošlého postupu. Voľme napríklad $h_1 = 4, h_2 = 2, h_3 = 3 \ldots$

V nasledovnej definícii je $\psi(i) = h(i)$, teda výška hodu v danom údere i.

Definícia 2.3 (Prostá žonglovacia funkcia)**.** Nech je daná funkcia $\psi : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$, ktorá $\forall i \in \mathbb{Z}$ priradí výšku hodu $\psi(i)$. Ďalej definujme funkciu $\overline{\psi} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tak, že $\overline{\psi}(i) = i + \psi(i)$. Ak $\overline{\psi}$ je permutáciou celých čísel, hovoríme, že ψ je *prostá žonglovacia funkcia* a nekonečná postupnosť:

$$\ldots \psi(-3)\psi(-2)\psi(-1)\psi(0)\psi(1)\psi(2)\psi(3)\ldots$$

môže byť žonglovaná.

Z predošlej konštrukcie a z definície je zrejmé, že takto vytvorená funkcia bude spĺňať vlastnosť (iii) prostého žonglovania, nakoľko funkcia $\overline{\psi}$ nám dáva práve ten úder, na ktorý loptička dopadne a keďže je permutáciou, tak z toho bezprostredne plynie, že dve loptičky nikdy nedopadnú na rovnaký úder.
Postupnosť hodov $\psi(i)$ z predošlej konštrukcie teda zapíšeme:

$$\ldots 5340423 \ldots$$

a priradená permutácia $\overline{\psi}(i)$ je:

$$\ldots 2130546 \ldots$$ [6]

Rozdeľme žonglovanie na menšie časti a budeme skúmať jednotlivé vzory, sekvencie hodov, ktoré žonglér vykonáva. V ďalšom texte sa budeme venovať konečným postupnostiam a vlastnosť (ii) zachováme tým, že postupnosť sa bude periodicky opakovať. Výšku hodov budeme považovať za zhora ohraničenú.

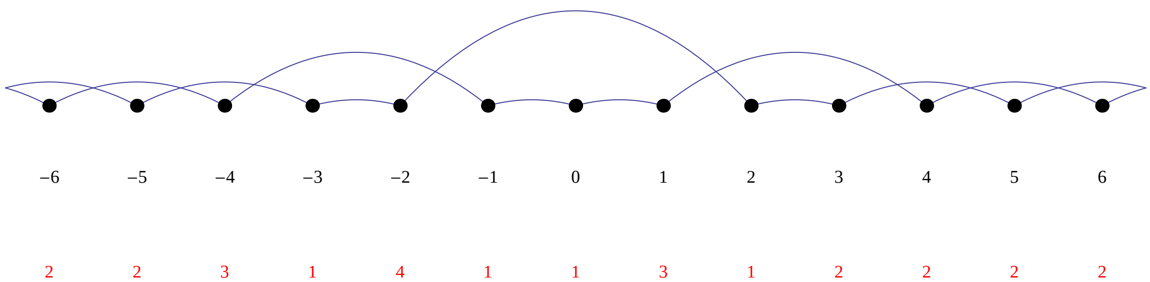
Definícia 2.4 (Prostá žonglovacia postupnosť (siteswap))**.** Nech $\{h_k\}_{k=0}^{p-1}$ je konečná postupnosť nezáporných celých čísel, potom táto postupnosť sa nazýva *prostá žonglovacia postupnosť*, alebo *siteswap* práve vtedy, keď funkcia $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$, ktorá priradí $\forall i \in \mathbb{Z} : \phi(i) = h_{i \bmod p}$, je prostá žonglovacia funkcia.

[6] Príloha A - /siteswapy/02_5340423.jml

$$h_0 h_1 \dots h_{p-1}$$

Je zrejmé, že každá prostá žonglovacia postupnosť je tvorená prostou žonglovacou funkciou. Naopak to však neplatí. Nie každá prostá žonglovacia funkcia musí tvoriť prostú žonglovaciu postupnosť.

Uveďme si príklady žonglovacích postupností a funkcií.
Majme danú žonglovaciu funkciu (Obrázok 5)



Obr. 5: Žonglovacia funkcia, ktorá nevytvára žonglovaciu postupnosť

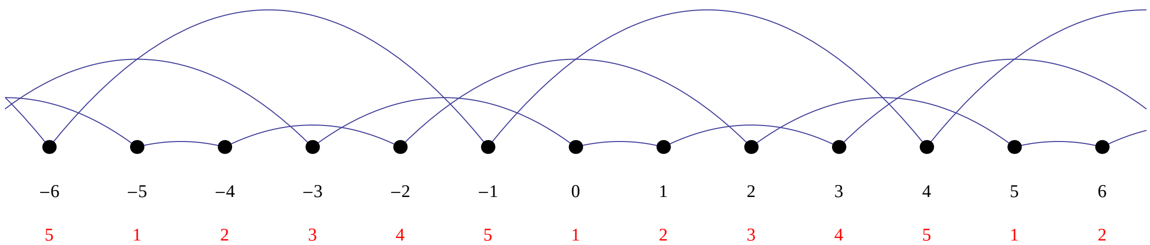
$$\psi(i) = \begin{cases} (|i+k|) - (|i|) & (|i| \text{ je prvočíslo; } |i+k| \text{ je najbližšie ďalšie prvočíslo, } k \in N) \\ (|i+l|) - (|i|) & (|i| \text{ je neprvočíslo; } |i+l| \text{ je najbližšie ďalšie neprvočíslo, } l \in N) \end{cases}$$

Aby bola ψ žonglovacou funkciou, musíme overiť, že $\overline{\psi}(\mathrm{i}) = \psi(i) + i$ je permutáciou.
Priamo z diagramu je však zrejmé, že to tak bude.
Touto žonglovacou funkciou sme vytvorili nasledovnú postupnosť hodov.

$$\dots 2231411312222 \dots$$

Postupnosť hodov spĺňa všetky podmienky prostého žonglovania a zároveň netvorí prostú žonglovaciu postupnosť, nakoľko sa nijakým spôsobom periodicky neopakuje a teda nie je konečná.

Majme danú postupnosť hodov $\{h_i\}_{i=0}^{p-1}$.



Obr. 6: Siteswap 12345

Položme $p = 5$ a $h_i = i + 1$. (Obrázok 6)

$$\begin{array}{ccccc} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}$$

Vytvorili sme postupnosť hodov[7], ktoré splňujú vlastnosti prostého žonglovania. Táto postupnosť zároveň spĺňa definíciu žonglovacej postupnosti. Nekonečné žonglovanie dostaneme periodickým opakovaním tejto postupnosti. $\phi(i) = h_{i \bmod p}$

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \dots & h_{-3} & h_{-2} & h_{-1} & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & \dots \\ \dots & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \end{array}$$

a súčasne $\overline{\phi}(\mathrm{i}) = \phi(i)+\mathrm{i}$ je permutáciou celých čísel

$$\dots 0\ 2\ 4\ 1\ 3\ 5\ 7\ 9\ 6\ 8\ 10 \dots$$

Všimnime si, že aj postupnosť

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5$$

je žonglovacou postupnosťou a prináleží jej rovnaká žonglovacia funkcia, vzhľadom na periódu.

[7] Príloha A - /siteswapy/03_12345.jml

Definícia 2.5. Žonglovaciu postupnosť, ktorá má najmenšiu periódu pri jej žonglovaní nazveme *minimálna žonglovacia postupnosť*, alebo *žonglovací vzor*, či len *vzor*.

Na zápis žonglovacej postupnosti nám postačí jej vzor, ktorým je postupnosť jednoznačne daná a periodicky sa opakuje.

Definícia 2.6. Všetky hody jednej loptičky v daných úderoch vytvárajú *orbitu* danej loptičky.

Každá loptička v našom žonglovaní je nekonečne mnoho krát chytená a žonglovaná. Orbita je v grafe znázornená nadväzujúcimi oblúkmi.

Veta 2.1 ((8), s. 10)**.** *Počet orbít je rovný počtu loptičiek v žonglovaní.*

Dôkaz. Dôkaz plynie priamo z definície orbity. □

Príklad 2.1. V našom príklade žonglovacej postupnosti 12345 vidíme že loptička, ktorá dopadne na úder 0 je hodená do výšky 1 a dopadne na úder 1, následne je hodená do výšky 2 a dopadne na úder 3, vyhodená je do výšky 4, a dopadne na úder 7, v ktorom je vyhodená do výšky 3 a dopadne na úder 10, v ktorom je vyhodená opäť do výšky 1 a hody v jej orbite sa ďalej opakujú. Podobnú, akurát posunutú orbitu opisuje loptička, ktorá dopadne na úder 2 . Loptička, ktorá dopadne na úder 4 je hodená do výšky 5 a dopadne na úder 9, keď je znova hodená do výšky 5 a tieto hody sa opakujú.

Orbita prvej loptičky[8] (Obrázok 7)

O^I: $h_0 = 1$ $h_1 = 2$ $h_3 = 4$ $h_7 = 3$

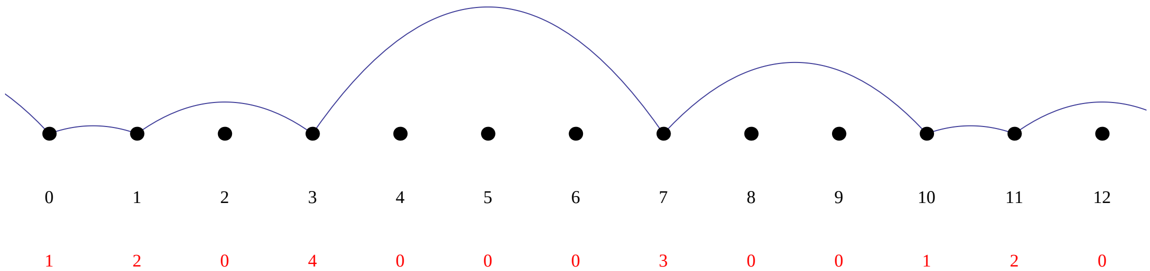
Orbita druhej loptičky (Obrázok 8)

O^{II}: $h_2 = 3$ $h_5 = 1$ $h_6 = 2$ $h_8 = 4$

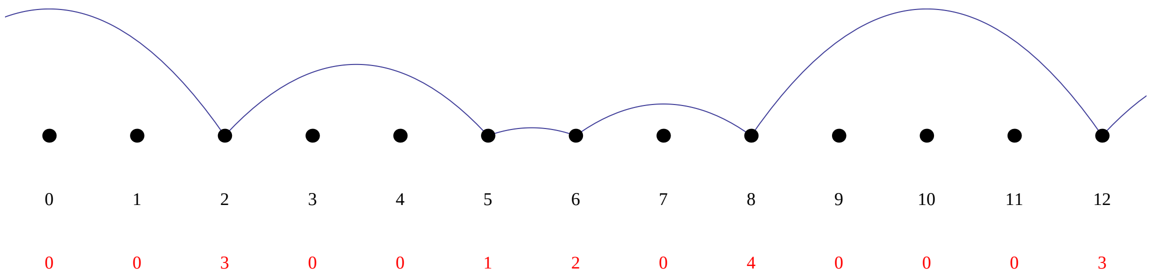
Orbita tretej loptičky[9] (Obrázok 9)

O^{III}: $h_5 = 5$

[8] Príloha A - /siteswapy/03_o1_12345.jml
[9] Príloha A - /siteswapy/03_o1_12345.jml



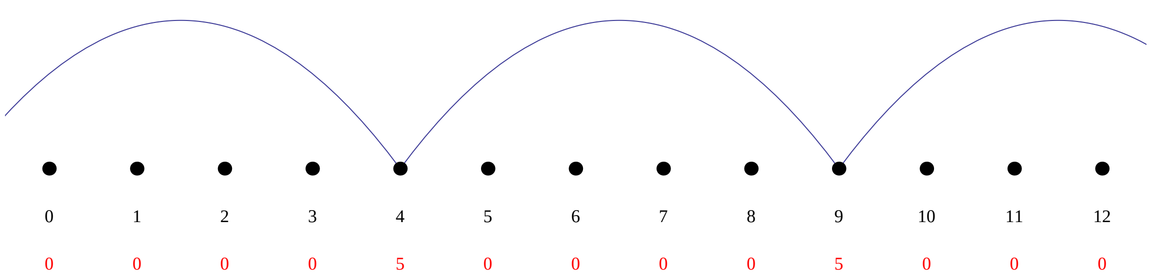
Obr. 7: O^I



Obr. 8: O^{II}

Veta 2.2 (O aritmetickom priemere, (8), s. 15)**.** *Počet loptičiek potrebných pre žonglovanie daného siteswapu* $\{h_k\}_{k=0}^{p-1}$ *je rovný jeho aritmetickému priemeru* $\dfrac{\sum_{k=0}^{p-1} h_k}{p}$.

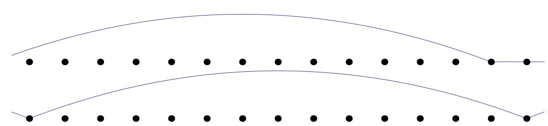
Dôkaz. Vezmime si najvyšší hod v danej postupnosti (výška hodu je ohraničená) $H = max\{h_k | k \in 0..p-1\}$. Vyberme si v našom žonglovaní interval úderov I taký, že $|I| > H$. Takýto interval je dostatočne široký pre to, aby tam dopadol aj najvyšší hod H. Ak by bol hod o tejto výške hodený na posledný úder pred začiatkom intervalu, jeho dopad by patril úderu v intervale I. Každá loptička teda dopadne v danom intervale I aspoň raz a počet orbít o je konečný. Súčet výšok hodov h_i na intervale I patriacich



Obr. 9: O^{III}

jednej orbite ohraničíme zdola. Ak by sme opäť volili najvyšší hod na posledný úder pred začiatkom intervalu a po jeho dopade volíme výšky hodov v orbite tej istej loptičky ako 1 dostávame dolnú hranicu $|I| - H + 1$. Naopak hornú hranicu $|I| + H - 1$ dostaneme ak volíme orbitu loptičky tak, že prechádza prvým úderom intervalu I a zároveň na posledný úder je prevedený hod o výške H (Obrázok 10). Pre $\forall i \in \mathbb{Z}$, uvažujúc postupnosť periodicky sa opakujúcu, môžeme písať:

$$\frac{o(|I| - H + 1)}{|I|} \leq \frac{\sum_{k=(i \mod p); i \in I} h_k}{|I|} \leq \frac{o(|I| + H - 1)}{|I|}$$



Obr. 10: Dolná hranica a horná hranica

a pre $|I| \to \infty$ je aritmetický priemer rovný počtu orbít.

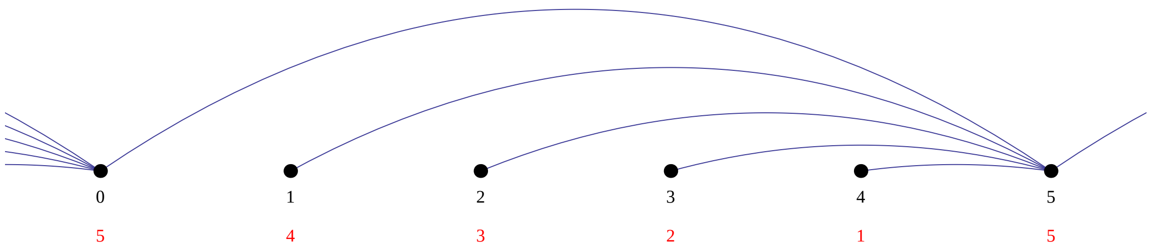
$\square$

Táto vlastnosť siteswapov je jedna z najdôležitejších pre žonglérov. Rýchlo si tak dokážu zrátať potrebný počet loptičiek pre daný siteswap, respektíve im to pomôže pri vymýšľaní nových siteswapov, ktoré hľadajú tak, aby aritmetický priemer bol celočíselný.

Príklad 2.2. Siteswap 12345, ktorému sme sa venovali pri orbitách má $\frac{1+2+3+4+5}{5} =$ 3 loptičky.

Dôležitým pozorovaním je, že celočíselný aritmetický priemer nie je postačujúcou podmienkou pre valídny siteswap, takže obrátená veta neplatí. Že tomu tak je si ukážeme na príklade:

Príklad 2.3. Majme postupnosť 54321 (Obrázok 11), ktorá má aritmetický priemer 3 rovnako ako v predošlom prípade, avšak každý hod by dopadol na šiesty úder a to je v rozpore s vlastnosťou (iii) prostého žonglovania.



Obr. 11: Postupnosť splňujúca podmienku aritmetického priemeru, ale v rozpore s vlastnosťami prostého žonglovania

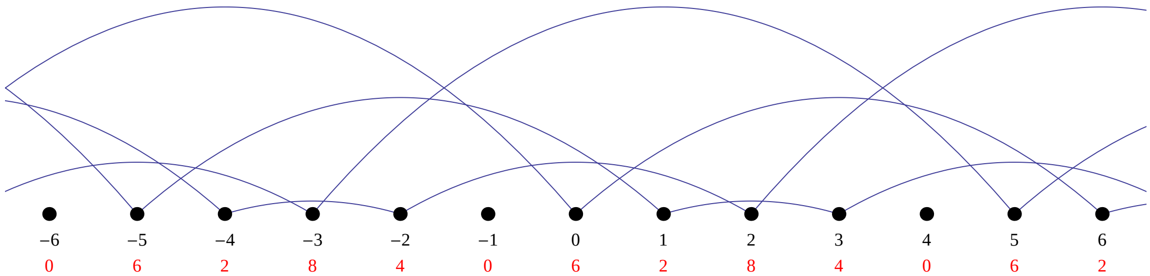
Dokážeme si však podobnú vetu, ktorá je z matematického hľadiska netriviálna a hrá dôležitú úlohu v teórii konečných grup. Uvedieme dôkaz pre konečné postupnosti. Vetu dokázal Marshall HALL(3) v roku 1952 na Kalifornskej univerzite.
Ešte pred tým je však vhodné poukázať na správanie siteswapov, ak výšky hodov budeme miesto zo $\mathbb{Z}$ brať zo $\mathbb{Z}_p$, kde p je dĺžka siteswapu.
Vezmime si pre ilustráciu opäť postupnosť 12345, o ktorej vieme, že je platný siteswap. Dĺžka siteswapu je $p = 5$. Ak by sme výšku hodu $h_0 = 1$ zväčšili o dĺžku periódy na $1 + 5 = 6$, tak miesto toho, aby dopadla na úder 1, do hodu h_1, dopadne na úder 6, do hodu h_6, z konštrukcie žonglovacej postupnosti je výška hodu $h_6 = h_{6 \bmod 5} = h_1$. Loptička teda dopadne na úder, v ktorom sa nachádza rovnaký hod, ako pred zmenou. Hod, ktorý mal dopadnúť na úder 6 bol h_5, jeho dopad sa však vďaka periodickému opakovaniu posúva až na úder 11. Podobne aj všetky ďalšie údery $0+k\cdot p, \forall k \in \mathbb{Z}$. Ukázali sme si teda, že každému hodu v našom siteswape môžeme pripočítať periódu a stále máme splnené vlastnosti prostého žonglovania. (Obrázok 12)[10]

Definícia 2.7. *Generátorom žonglovacej postupnosti* nazývame postupnosť $\{h_k\}_{k=0}^{p-1} \mod p$.

Veta 2.3. *Generátor žonglovacej postupnosti je žonglovacia postupnosť.*

Dôkaz. Plynie z definície žonglovacej postupnosti a definície generátora žonglovacej

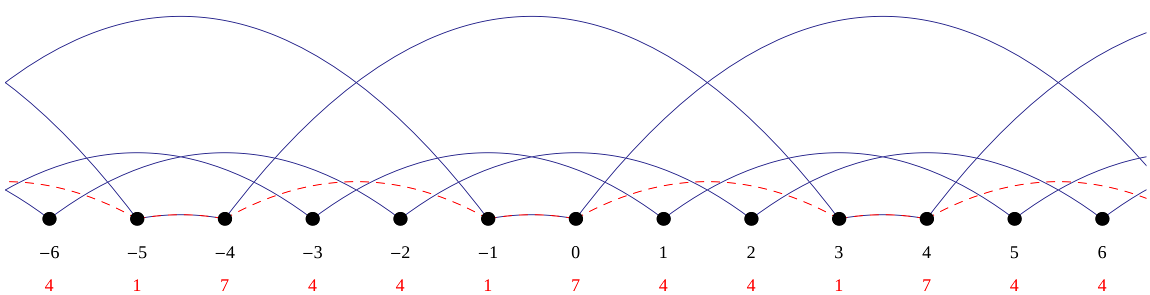
[10]Príloha A - /siteswapy/04_62840.jml



Obr. 12: Siteswap 62840 vytvorený z 12345 pričítaním periódy k 1. a 3. hodu a odčítaním periódy od posledného hodu.

postupnosti. Ak si vezmeme žonglovaciu postupnosť $\{h_k\}_{k=0}^{p-1}$ tak jej pridružená postupnosť $\phi_k = (h_k + k) \mod p = (h_k \mod p + k) \mod p$ je permutáciou dĺžky p a $\{h_k\}_{k=0}^{p-1} \mod p$ je žonglovacia postupnosť. $\square$

Príklad 2.4. Majme danú žonglovaciu postupnosť 7441[11]. Jej generátorom je postupnosť $7441 \mod 4 = 3001$[12]. (Obrázok 13)



Obr. 13: Siteswap 7441 a jeho generátor 3001 (červená).

Veta 2.4 („Obrátená“ veta o aritmetickej postupnosti)**.** *Nech je daná postupnosť nezáporných celých čísel $\{h_k\}_{k=0}^{p-1}$, tak, že jej aritmetický priemer je celé číslo, potom existuje permutácia tejto postupnosti, ktorá je žonglérskou postupnosťou.*

Veta a dôkaz sú obdobou dokumentu TAYLOR (10)

Dôkaz sa skladá z dvoch častí. Najprv musíme dokázať nasledovné Lemma, ktoré

[11]Príloha A - /siteswapy/05_7441.jml
[12]Príloha A - /siteswapy/05_gen_3001.jml

neskôr aplikujeme.

Lemma 2.5. *Nech je daná postupnosť nezáporných celých čísel, ktorá môže byť preusporiadaná na prostú žonglovaciu postupnosť. Ak zmeníme dva členy postupnosti tak, že aritmetický priemer novej postupnosti je celé číslo, potom táto postupnosť môže byť opäť preusporiadaná na žonglovaciu postupnosť.*

Dôkaz.

úder	0	1	$\dots$	$p-1$		0	$\dots$	i	$\dots$	j	$\dots$	$p-1$
výška hodu	h_0	h_1	$\dots$	h_p-1	$\rightarrow$	h_0	$\dots$	x_i	$\dots$	x_j	$\dots$	h_p-1
dopad	$\phi(0)$	$\phi(1)$	$\dots$	$\phi(p-1)$		$\phi(0)$	$\dots$	$\phi'(i)$	$\dots$	$\phi'(j)$	$\dots$	$\phi(p-1)$

Uvedená tabuľka ukazuje po zmene stav, v ktorom sme zmenili výšku hodov, ale ešte nebola prevedená zmena ich dopadov. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že vstupná postupnosť je už usporiadaná na žonglovaciu postupnosť. To znamená, že postupnosť $\phi(k) = h_k + k$, $\forall k$ je permutáciou v $\mathbb{Z}_p$. Zmeňme výšku hodov h_i a h_j na x_i a x_j tak, že aritmetický priemer novej postupnosti je celé číslo. Platí:

$h_i + h_j = x_i + x_j$

$\phi(i) + \phi(j) = h_i + i + h_j + j = x_i + i + x_j + j.$

Nasledujúcim spôsobom preusporiadame novú postupnosť na žonglovaciu postupnosť:

Ak $x_i + i = \phi(i)$, tak dostávame platný siteswap a nemusíme nič meniť.

Ak $x_i + i = \phi(j)$, tak zameníme $\phi(i)$ a $\phi(j)$.

Ak $x_i + j = \phi(j)$, tak vymeníme x_i s x_j.

Ak $x_i + j = \phi(i)$ tak zameníme x_i s x_j a tiež $\phi(i)$ a $\phi(j)$.

Po každej z týchto výmen sa nám pre údery iné ako i a j nič nezmenilo, nemusíme nič viac ošetriť, a teda dostávame správnu žonglovaciu postupnosť. Ak by ani jeden prípad nenastal, tak hody výšok x_i a x_j dopadnú zároveň s iným hodom siteswapu a musíme ošetriť ďalšie hody postupnosti nasledovne:

Položme $d = \phi(i) - x_i$, potom $d \neq i, j$ a d je úderom, na ktorý musí byť vykonaný hod výšky x_i aby dopadol na úder $\phi(i)$ v novom siteswape. Preusporiadame jednotlivé hody nasledovne: hod o výške x_i s dopadom na úder $\phi(i)$ sa vykoná na úder d, hod o výške h_d presunieme do času i a priradíme mu čas dopadu $\phi(j)$. Dopad na úder $\phi(d)$ priradíme hodu vykonanemú v čase j. V tabuľke je uvedený predošlý stav a zmena na stav v preusporiadanej postupnosti.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \dots & i & \dots & j & \dots & d & \dots & & \dots & i & \dots & j & \dots & d & \dots \\ \dots & x_i & \dots & x_j & \dots & h_d & \dots & \rightarrow & \dots & h_d & \dots & x_j & \dots & x_i & \dots \\ \dots & \phi(i) & \dots & \phi(j) & \dots & \phi(d) & \dots & & \dots & \phi(j) & \dots & \phi(d) & \dots & \phi(i) & \dots \end{array}$$

Na úder d máme teda z konštrukcie správny hod aj čas dopadu a ostáva nám ošetriť údery i a j. Zo vzťahov:

$\phi(i) + \phi(j) = x_i + i + x_j + j$ a $d = \phi(d) - h_d = \phi(i) - x_i$ dostávame

$\phi(j) + \phi(d) = h_d + i + x_j + j$

a pre údery i a j je teda splnený prvý vzťah. Pokračujeme ďalej rovnakými operáciami.

Je potrebné ukázať, že náš postup je konečný a teda naozaj vedie k vytvoreniu novej žonglovacej postupnosti. Postupujme teda ďalej, za predpokladu, že sme sa nedostali do žiadneho jednoduchého prípadu a volíme nový úder $d_1 = \phi(j) - h_d$. Keďže $d = \phi(d) - h_d$, tak $d \neq d_1$. $\phi(j)$ a h_d teda presunieme do úderu d_1. Ak by sme sa následne v nejakom z ďalších krokov dostali do situácie[13], kde by v preusporiadanej postupnosti na úder i platilo pre nejaké ${}^1\phi_i$ a ${}^1x_i :^1 \phi_i -^1 x_i = d$, tak po prevedení výmeny

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \dots & i & \dots & j & \dots & d & \dots & & \dots & i & \dots & j & \dots & d & \dots \\ \dots & {}^1x_i & \dots & x_j & \dots & x_i & \dots & \rightarrow & \dots & x_i & \dots & x_j & \dots & {}^1x_i & \dots \\ \dots & {}^1\phi(i) & \dots & {}^1\phi(j) & \dots & \phi(i) & \dots & & \dots & {}^1\phi(j) & \dots & \phi(i) & \dots & {}^1\phi(i) & \dots \end{array}$$

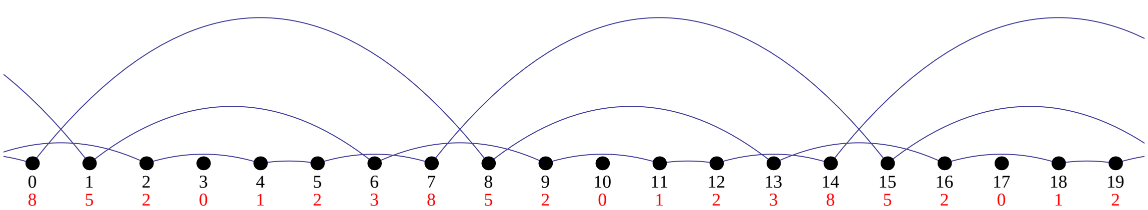
dostávame $\phi(i) +^1 \phi(j) = x_i + i + x_j + j$ a musí platiť ${}^1\phi(j) = \phi(j)$. Tento prípad ale nemôže nastať, nakoľko hod s dopadom na úder $\phi(j)$ je prevedený na úder d_1. Žiaden krok sa teda nemôže zopakovať a z predpokladanej konečnosti žonglovacej postupnosti je Lemma dokázané. $\square$

[13] značíme ľavým horným indexom 1, pre zmenené hody a presunuté dopady

Dôkaz. Nech je daná postupnosť $h_0 \dots h_{p-1}$ s celočíselným aritmetickým priemerom a triviálny siteswap o dĺžke p pozostávajúci z nulových hodov. Zámenou prvej 0 za h_0 a druhej 0 za $p - h_0$ dostaneme postupnosť, ktorú vieme podľa Lemmy preusporiadať na siteswap. Vymeňme teraz člen $p - h_0$ za h_1 a tretiu 0 za $p - h_0 - h_1$. Takto postupujeme až kým vymeníme predposlednú 0 za h_{p-2} a ostala nám posledná 0, ktorú zameníme za $p - h_0 - h_1 - \dots - h_{p-2}$, čo sa ale v $\mathbb{Z}^p$ musí rovnať h_{p-1}, nakoľko $\sum_{0}^{p-1} h_k$ je deliteľný p, keďže postupnosť $\{h_k\}_{k=0}^{p-1}$ má celočíselný priemer. □

Pre aplikáciu v žonglovaní je táto veta veľmi prínosná. Žonglér sa tak pri učení náročného siteswapu s väčším počtom loptičiek môže naučiť podobný siteswap s menším počtom. Stačí mu od jedného z hodov odčítať dĺžku siteswapu alebo pozmeniť dva hody tak aby mu vyšiel celočíselný aritmetický priemer. Napríklad siteswap 7531 so štyrmi loptičkami sa môže učiť pomocou siteswapov 3531, či 7131 (v oboch prípadoch sme odčítali 4 od jedného z hodov). Taktiež si môže pretvoriť danú postupnosť dvomi novými číslami alebo rovno vytvoriť z vybranej ľubovoľnej postupnosti hodov splňujúcej celočíselný aritmetický priemer nový siteswap.

Príklad 2.5 (Obrázok 14)**.** [14]. Majme daný platný siteswap 8520123. Budeme si postupne voliť čísla, ktoré zmeníme a vytvoríme si tak, na základe dokázanej Lemmy, nový siteswap.



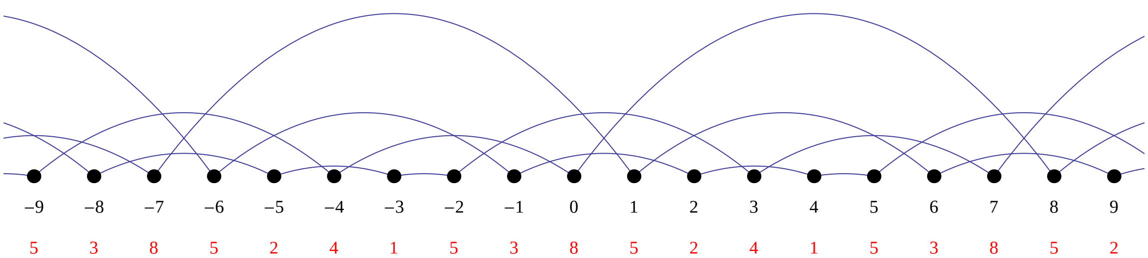
Obr. 14: Siteswap 8520123

Aritmetický priemer siteswapu je $\frac{8+5+2+0+1+2+3}{7} = 3$. Na žonglovanie sú potrebné

[14]Príloha A - /siteswapy/06_1_8520123.jml, /siteswapy/06_2_8524153.jml, /siteswapy/06_3_3864115.jml

3 loptičky. Pri žonglovaní 2 rukami je hod 2 prakticky len podržanie loptičky a na hod 0 sa nič nestane. Pokúsime sa ich vymeniť tak, aby sme mali 4 loptičky. Zmeňme 0 zo štvrtej pozície na 4 a 2 zo šiestej pozície na 5. (Obrázok 15)

i	0	1	2	3	4	5	6		0	1	2	3	4	5	6
h_i	8	5	2	0	1	2	3	$\rightarrow$	8	5	2	4	1	5	3
$\phi(i)$	1	6	4	3	5	0	2		1	6	4	3	5	0	2



Obr. 15: Siteswap 8524153

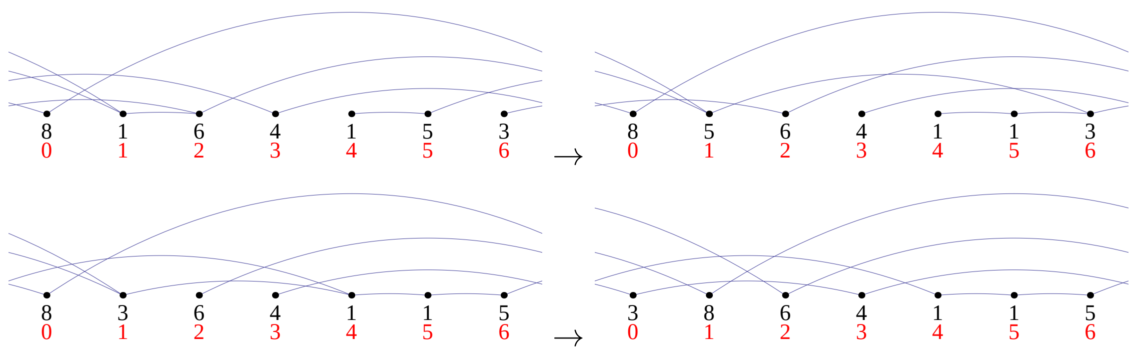
Dostali sme sa do jednoduchého prípadu, keď (podľa Lemmy) $x_i + i = \phi(j)$ a stačí nám zameniť $\phi(i)$ za $\phi(j)$. Urobme ďalej zámenu hodu 5 za 1 a hodu 2 za 6. Počet loptičiek sa nám nezmení. (Obrázok 16)

i	0	1	2	3	4	5	6		0	1	2	3	4	5	6
h_i	8	5	2	4	1	5	3	$\rightarrow$	8	1	6	4	1	5	3
$\phi(i)$	1	6	4	0	5	3	2		1	6	4	0	5	3	2

ani jedna z jednoduchých možností na výmenu medzi údermi 1 a 2 nenastáva. Musíme ošetriť hod $d = 6 - 1 = 5$, opäť sa dostaneme do netriviálneho prípadu a pokračujeme k ďalšiemu kroku, $d' = 4 - 5 = 6, d'' = 0$

0	1	2	3	4	5	6		0	1	2	3	4	5	6		0	1	2	3	4	5	6
8	5	6	4	1	1	3	$\rightarrow$	8	3	6	4	1	1	5	$\rightarrow$	3	8	6	4	1	1	5
1	4	3	0	5	6	2		1	3	2	0	5	6	4		3	2	1	0	5	6	4

až sa napokon dostávame do prípadu, keď nemusíme už nič meniť. Výsledný siteswap nám vyšiel 3864115.



Obr. 16: Prechod pri zmene žonglovacej postupnosti

2.3 Skúšky platnosti siteswapu

Ukázali sme si niekoľko dôležitých vlastností pre žonglovacie postupnosti. V ďalšej kapitole sa budeme snažiť vytvárať vlastné siteswapy jednoduchými operáciami. Aby sme si dokázali rýchlo skontrolovať, či je nami vytvorený siteswap možné žonglovať, ukážeme si ešte predtým zopár skúšok správností, bezprostredne plynúcich z predchádzajúcej časti. Samotní žongléri tieto skúšky často používajú.

Veta 2.6 (Skúška aritmetického priemeru, (8), s. 16)**.** *Ak je konečná postupnosť nezáporných celých čísel žonglovacia postupnosť, potom jej aritmetický priemer je celé číslo.*

Dôkaz. Plynie bezprostredne z Vety o aritmetickej postupnosti. □

Veta 2.7 (Skúška permutácie, (8), s. 22)**.** *Nech* $\{h_k\}_{k=0}^{p-1}$ *je postupnosť nezáporných celých čísel dĺžky* p*, potom táto postupnosť je žonglovacou postupnosťou práve vtedy, keď funkcia* $\phi : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p : \phi(k) \to (k + h_k) \mod p$ *je permutáciou v* $\mathbb{Z}_p$*.*

Dôkaz. Ak máme žonglovaciu postupnosť, ukázali sme si už, že aby spĺňala vlastnosti prostého žonglovania, musí každá loptička dopadnúť na iný úder. A teda, ak k hodu h_k pripočítame jeho úder k, musí byť hodnota $h_k + k$, pre každé k rôzna. Rovnako sme si ukázali, že každú výšku hodu v siteswape môžeme ľubovoľne meniť o periódu p a stále máme žonglovaciu postupnosť, rovnako aj ($h_k \mod p + k$ má pre každé k inú celočíselnú hodnotu, tým pádom funkcia $\phi(k) = (h_k + k) \mod p$ pre

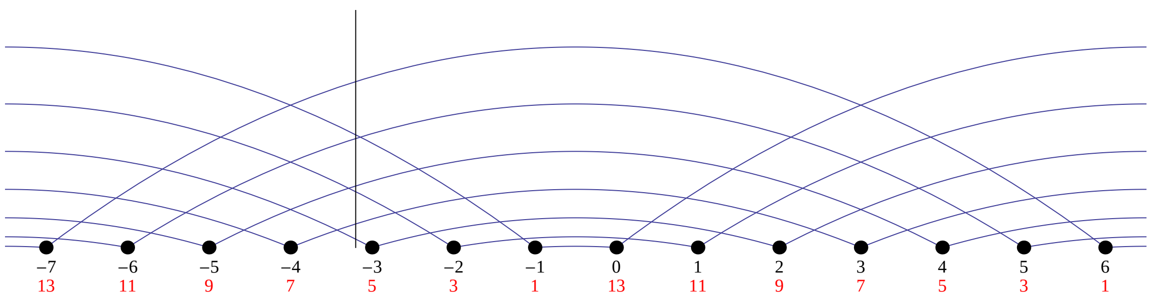
$k = 0..p-1$ je permutáciou na $\mathbb{Z}_p$.

Naopak, majme danú permutáciu $\phi : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p : \phi(k) \to (k + h_k) \mod p$, ktorá odpovedá časom dopadu loptičiek. Periodickým opakovaním dostávame priradenú žonglovaciu funkciu $\overline{\psi}(k) = k + h_{k \mod p}$. Je zrejmé, že $k \leq \overline{\psi}(k)$ a $\psi(k) = \overline{\psi}(k) - k = h_{k \mod p}$ je hľadaná žonglovacia funkcia, priraďujúca hodom nezáporné hodnoty, ktorá generuje žonglovaciu postupnosť h_k. □

Skúšky diagramom

1. Základný diagram (Obrázok 17)[15]

Základný diagram používame intuitívne už v predošlých odstavcoch. Jeho vytvorenie je veľmi jednoduché, body na pomyselnej priamke sú celočíselnou osou určujúc čas (údery), oblúky označujú hody. To priamo odpovedá vlastnosti (i) a (ii) prostého žonglovania.



Obr. 17: Siteswap db97531 o siedmich loptičkách s vyznačením priesečníkov s orbitami loptičiek.

Ak do bodu (úderu i) vedie oblúk (dopadne loptička), musí z neho oblúk aj vychádzať (loptička je vyhodená do výšky h_i a dopadne do úderu $i + h_i$). Ak do bodu žiaden oblúk nevedie, žiaden oblúk z neho nevychádza ($h_i = 0$). Do každého bodu vedie nanajvýš jeden oblúk. Tým je splnená aj vlastnosť (iii).

Každý oblúk odpovedá trajektórii (orbite) jednej loptičky. Trajektória je súvislá, oblúky na seba naväzujú.

Ak preložíme grafom zvislú priamku tak počet priesečníkov s oblúkmi nám určuje

[15] Príloha A - /siteswapy/07_db97531.jml

počet loptičiek daného žonglovania.

Ak existuje priesečník dvoch oblúkov, tak loptičky prechádzajú rovnakou výškou. Loptička, ktorá prechádza časťou oblúka ďalej od osi prechádza vyššie.

Graf je veľmi užitočný pri riešení matematických problémov, avšak len pre krátke postupnosti, nakoľko sú údery na priamke.

Pre praktické žonglovanie dvomi rukami je však graf pomerne ťažko čitateľný, nepoukazuje na, pre žonglérov, podstatné veci ako napríklad do ktorej ruky loptičká dopadá (párne/nepárne hody).

2. Cyklický diagram (Obrázok 18)[16]

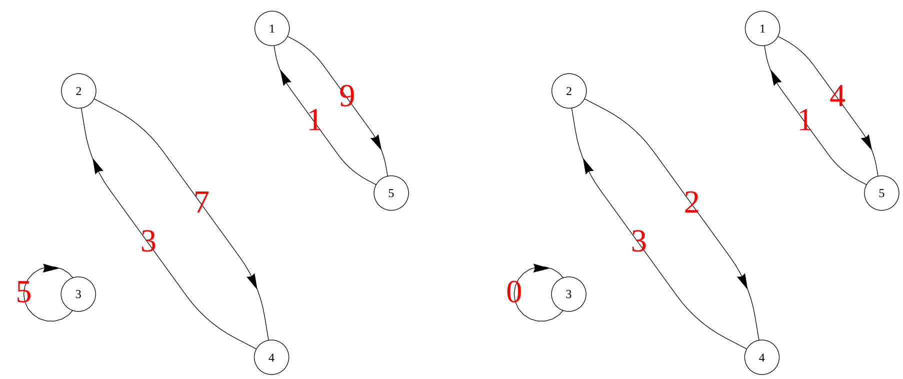
Cyklický diagram nám zobrazuje generátor žonglovacej postupnosti. Zostavenie je veľmi podobné ako u základného diagramu. Na rozdiel od priamky ho však zobrazujeme na kružnici. Body na kružnici odpovedajú momentom v čase, ich počet je rovný dĺžke periódy. Zvolíme si úder 1 a orientáciu (v texte používame orientáciu v protismere hodinových ručičiek). Hodom o výškach h_i priradíme orientované šípky začínajúce v danom údere i a končiace v $h_i + i$. Ak je výška hodu väčšia ako dĺžka periódy, nič sa nemení, pokračujeme ďalej po kružnici.

Aby sme zabezpečili podmienku (iii) z vlastností prostého žonglovania, musí opäť platiť, že ak z jedného úderu šípka vyhádza, musí doň šípka aj vchádzať. To platí v tomto prípade aj pre nulové hody (hod je reprezentovaný slučkou vychádzajúcou aj vchádzajúcou do toho istého úderu). Do každého bodu cyklického grafu vchádza práve jedna šípka a jedna šípka z neho vychádza.

Každá orbita siteswapu tvorí v grafe cyklus (slučka je tiež cyklus). Nakoľko zobrazujeme len generátor, počet loptičiek opisujúcich zhodnú orbitu musíme vypočítať analyticky, nasledovne:

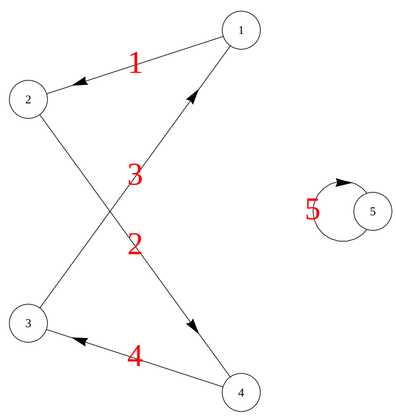
Vezmime si jeden uzavretý cyklus v grafe, všetky ostatné hody zmeníme na nulové. Ostal nám graf, ktorý je orbitou aspoň jednej loptičky a stále je žonglovacou postupnosťou, nakoľko nulové hody tvoria v grafe slučky. Pomocou vety o aritme-

[16] Príloha A - /siteswapy/08_97531.jml, /siteswapy/08_gen_42031



Obr. 18: Siteswap 97531 a jeho generátor 42031 v cyklickom grafe

tickom priemere spočítame počet loptičiek danej žonglovacej postupnosti. Výsledok nám udáva počet loptičiek opisujúcich zhodnú orbitu (až na posunutie o násobok periódy).



Obr. 19: Siteswap 12345 o troch loptičkách, hod 5 (slučka) opisuje jedna loptička, ostatné hody tvoria cyklus, ktorý prináleží dvom zhodným orbitám

Príklad 2.6 (Obrázok 19)**.** Napríklad v siteswape 12345 máme 3 orbity, ako sme už skôr spočítali. Hod o dĺžke periódy tvorí zrejme sám o sebe jednu orbitu, jeho generátor má na rovnakej pozícii nulu. Ostala nám teda postupnosť 12340 o dĺžke 5 a v grafe vidíme len jeden cyklus bez slučiek obsahujúci hody 1, 2, 3 a 4. Pomocou vety o aritmetickom priemere počítame $\frac{1+2+3+4}{5} = 2$. Takže 2 loptičky opisujú zhodnú orbitu, až na posunutie v čase.

Cyklické grafy sú výborným prostriedkom pre hľadanie generátorov žonglovacích postupností o danej perióde. Na vytvorenie generátora nám stačí pospájať body šípkami tak, aby sme splnili podmienku jednej vchádzajúcej a vychádzajúcej šípky. Navyše ich nakreslenie je veľmi jednoduché a rýchle pre akékoľvek dlhé žonglovacie postupnosti. Nevýhodou je, že počet loptičiek musíme dopočítať. Pre žongléra je nevýhodou aj to, že priamo nevidí, z ktorej ruky práve vyhadzuje loptičku, dokonca ani výšku hodu.

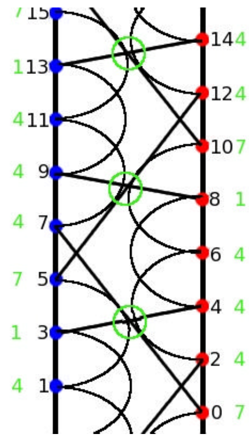
3. Rebríkový diagram (Obrázok 20)[17]

Tak, ako je cyklický diagram vhodný pre počítanie, rebríkový je vhodný pre žonglérov. Žonglovanie zobrazujeme na dvoch priamkach, ktoré reprezentujú časové osi úderov pre hody v oboch rukách. Čas plynie zdola hore a prechádzame údery pravej a ľavej ruky, pričom úsečky značia hod do druhej ruky (o nepárnej výške) a oblúky hod do ruky tej istej (o párnej výške).

Z každého bodu, do ktorého vchádza úsečka alebo oblúk hodu, vychádza úsečka alebo oblúk hodu nasledovného. Ak do bodu nevchádza žiaden hod, žiaden z neho ani nevychádza. Každá loptička má teda zrejme vlastnú spojitú trajektóriu vytvorenú z oblúkov a úsečiek. Ak pretneme rebríkový graf horizontálnou priamkou, počet priesečníkov s grafom je rovnaký ako počet loptičiek.

Rebríkový graf je veľmi názorný pre žonglérov, práve kvôli tomu, že rozlišuje hody z oboch rúk. Stred úsečky, či oblúku je najvyšším bodom v danom hode. Pre žongléra, ktorý sa sústredí na efekt svojho triku to znamená napríklad, že ak sa stretne viac loptičiek na ose medzi ramenami diagramu, akoby zastanú na jednej vertikálnej línii v priestore a začnú padať dole (v Obrázku 20 hody 7 a 1).

[17] Príloha A - /siteswapy/09_74414.jml



Obr. 20: Rebríkový diagram siteswapu 74414

2.4 Generovanie siteswapov

Bruce „Boppo“ Tiemann pri komentovaní vzniku siteswapu hovorí o tom, že slovo siteswap (z anglického „site“: strana a „swap“: zameniť) pochádza z pozorovania trikov, pri ktorých sa mení poradie, v akom loptičky dopadajú do rúk. Ako príklad uvádza siteswap 531[18], kde máme tri farby loptičiek: modrú, červenú, zelenú. Modrú vyhodíme do výšky 5, následne červenú do výšky 3 a zelenú do výšky 1. Na ďalší úder je na rade zelená do výšky 5, červená do výšky 3 a napokon modrá do výšky 1. Vidíme, že poradie loptičiek sa nám obrátilo.

V nadchádzajúcej časti si ukážeme, ako žonglovacie postupnosti vytvárať obmenou už známych postupností pomocou operácií. Následne, vďaka takto definovaným operáciám použijeme takzvaný vyhladzovací algoritmus na generovanie všetkých žonglovacích postupností o nami zvolených podmienkach.

Veta 2.8 (Zámena strán[19], (8), s. 19)**.** *Nech $h = \{h_k\}_{k=0}^{p-1}$ je postupnosť nezáporných celých čísel dĺžky $p \geq 2$. i a j sú údery v danej postupnosti také, že $\phi(i) \geq j$. Potom pre novú postupnosť x, v ktorej je výška hodu na úder i rovná $x_i = h_j + j - i$ a výška hodu na úder j rovná $x_j = h_i + i - j$, platí ekvivalencia:*

[18]Príloha A - /siteswapy/10_531.jml

[19]Slovom siteswap označujeme žonglovaciu postupnosť (tak ako aj žonglérska komunita v praktickom žonglovaní), v niektorej literatúre sa tak označuje aj operácia, ktorú v tomto texte nazývame *zámena strán*.

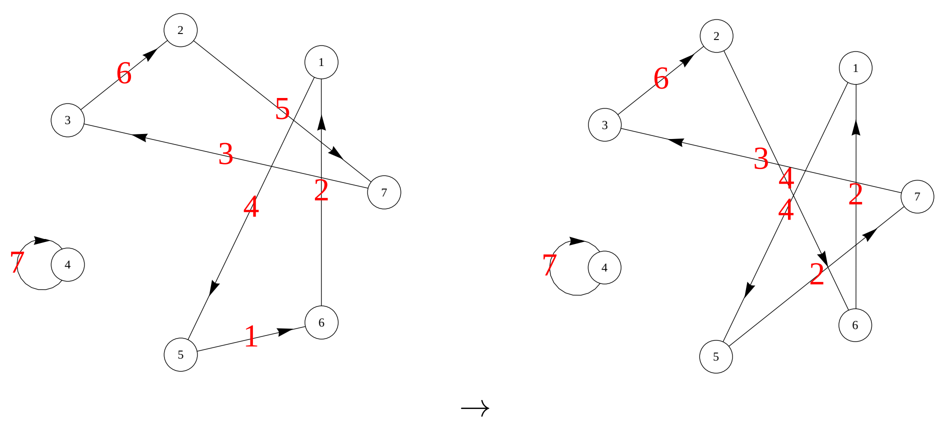
(i) x je siteswapom práve vtedy, keď $\{h_k\}_{k=0}^{p-1}$ je siteswapom.

(ii) Aritmetický priemer x je rovnaký ako aritmetický priemer h.

(iii) Počet loptičiek žonglovaných v x je rovnaký, ako počet loptičiek pre h

a takto definovanú operáciu nazývame zámena strán v úderoch i a j.

Dôkaz. (i) je špeciálnym prípadom z Lemmy v „Obrátenej“ vete o aritmetickom priemere. (ii) plynie zo vzťahu $h_i + h_j = (h_j + j - i) + (h_i + i - j) = x_i + x_j$. (iii) je zrejmá z (ii), keďže pri zachovaní aritmetického priemeru je počet loptičiek rovnaký. $\square$



Obr. 21: Zámena strán 2. a 5. hodu. V cyklickom diagrame začíname na úder 1. Hodom na údery 2 a 5 sme zamenili údery, v ktoré dopadnú.

Príklad 2.7 (Obrázok 21). [20] Nech je daný siteswap 4567123. Prevedieme zámenu strán v úderoch 1 a 4.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & {\color{red}4} & 6 & 7 & {\color{red}2} & 2 & 3 \end{array}$$

Veta 2.9 (Cyklická zámena, (8), s. 19). *Nech $h = \{h_k\}_{k=0}^{p-1}$ je postupnosť nezáporných celých čísel dĺžky $p \geq 2$. Pre postupnosť $x' = h_{p-1}h_0h_1 \dots h_{p-2}$ platí ekvivalencia:*

[20] Príloha A - /siteswapy/11_1_4567123.jml, /siteswapy/11_2_4467223.jml

(i) *x' je siteswapom práve vtedy, keď* $\{h_k\}_{k=0}^{p-1}$ *je siteswapom.*

(ii) *Aritmetický priemer* x' *je rovnaký ako aritmetický priemer* h*.*

(iii) *Počet loptičiek žonglovaných v* x' *je rovnaký, ako počet loptičiek pre* h*.*

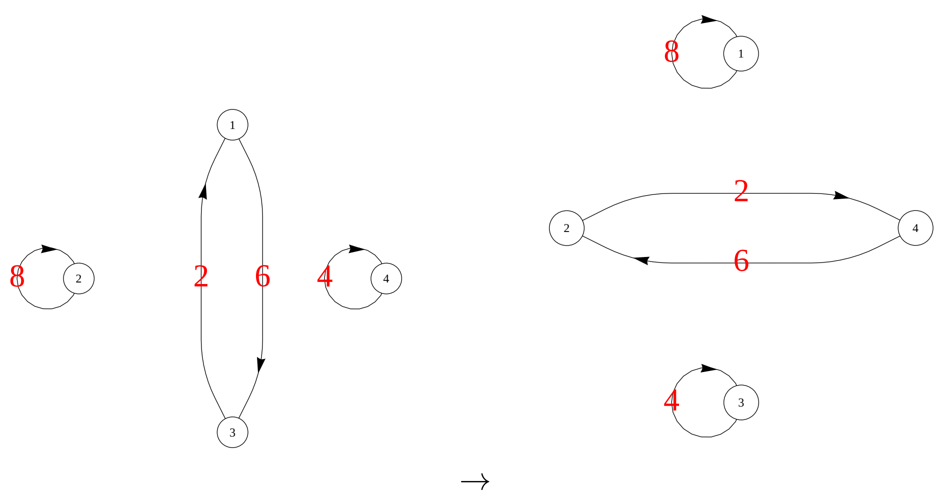
A takto definovanú operáciu nazývame cyklická výmena.

Dôkaz. (i) plynie zo skúšky permutácie, (ii) a (iii) sú zrejmé. □

Cyklická zámena nám dovoľuje začať siteswap ktorýmkoľvek hodom. Cyklické diagramy žonglovacích postupností sú pri cyklickej zámene izomorfné.

Príklad 2.8 (Obrázok 22)**.** [21] Cyklická zámena siteswapu 6824.

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 2 & 4 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 8 & 2 & 4 & 6 \end{array}$$



Obr. 22: Cyklická zámena. Spôsobuje otočenie grafu.

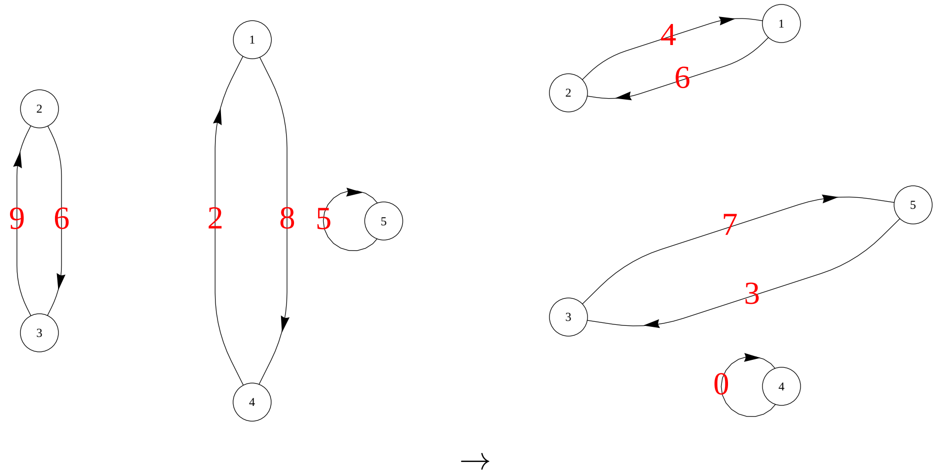
Veta 2.10 (Vertikálna zámena, (8), s. 23)**.** *Nech* $h = \{h_k\}_{k=0}^{p-1}$ *je postupnosť nezáporných celých čísel,* d *je celé číslo také, že* $d \geq -min(h_0, \ldots, h_k)$*. Postupnosť* h

[21] Príloha A - /siteswapy/12_6824.jml

je žonglovacou postupnosťou práve vtedy, keď $h' = \{h_k + d\}_{k=0}^{p-1}$ *je žonglovacou postupnosťou. Takto definovanú zámenu medzi* h *a* h' *nazývame* vertikálna zámena *o veľkosti* d*.*

Dôkaz. Vertikálna zámena je priamym dôsledkom skúšky permutácie. □

V praxi si tak pričítaním konštanty d vieme vytvoriť nový siteswap. Počet loptičiek sa podľa vety o aritmetickom priemere zmení o veľkosť d.



Obr. 23: Vertikálna zámena. Vytvára izomorfný graf.

Príklad 2.9 (Obrázok 23)**.** [22] Vertikálna zámena siteswapu 86925 o veľkosti -2 vytvára siteswap 64703. Zo siteswapu pre 6 loptičiek sme vytvorili siteswap pre 4 loptičky.

Vytvorili sme si dostatok nástrojov na to, aby sme plynule prechádzali medzi siteswapmi. Vezmime si teraz ľubovoľnú žonglovaciu postupnosť o dĺžke p, na ktorú potrebujeme n loptičiek. Budeme sa snažiť ju upravovať do nejakého základného tvaru tak, aby sa nám počet loptičiek, ani perióda nezmenili. Cyklická zámena, ani zámena strán nám počet loptičiek, ani periódu nijak neovplyvnili, takže ich môžeme ľubovoľne používať. Za základný tvar si vezmime konštantnú postupnosť (fontánu,

[22]Príloha A - /siteswapy/13_1_86925.jml, /siteswapy/13_2_64703.jml

alebo kaskádu) o perióde p. Ukážeme si algoritmus, ktorý nám danú žonglovaciu postupnosť „vyhladí“ do tohto tvaru. Navyše, keď si uvedomíme, že zámena strán sa dá použiť aj naopak a cyklická výmena aplikovaním p krát posunie postupnosť do pôvodného stavu, zistíme, že dôsledkom tohto algoritmu je nasledovná veta:

Veta 2.11 (Veta o generovaní všetkých žonglovacích postupností, (8), s. 21)**.** *Žonglovacia postupnosť môže byť prevedená na akúkoľvek žonglovaciu postupnosť o rovnakom počte loptičiek a dĺžke použitím operácií zámena strán a cyklická výmena.*

Dôkaz. Plynie priamo z viet o zámene strán a cyklickej zámene pri použití Vyhladzovacieho algoritmu popísaného nižšie. □

Vyhladzovací algoritmus ((8), s. 20)
Majme danú vstupnú postupnosť $h = \{h_k\}_{k=0}^{p-1}$ nezáporných celých čísel o dĺžke $p \geq 1$.

1. Ak h je konštantná postupnosť, ukonči program a výstupom je táto postupnosť. Inak pokračuj

2. preveď cyklické zámeny tak, aby hod s najväčšou výškou bol na úder 0 a hod s menšou, než najväčšou výškou bol na úder 1. Ak sa výšky hodov h_0 a h_1 líšia len o 1, ukonči program a výstupom je táto postupnosť. Inak pokračuj

3. preveď zámenu strán hodov h_0 a h_1 a h prepíš na novú postupnosť. Vráť sa na krok 1.

Dôkaz funkčnosti algoritmu. Konečnosť algoritmu je zaistená krokom 3, nakoľko zámena strán znižuje výšku najvyššieho hodu. Ak je na vstupe daná žonglovacia postupnosť tak zo zavedenia zámeny strán a cyklickej zámeny plynie, že na výstupe bude taktiež žonglovacia postupnosť (plynie z (i) vo vetách o zámene strán a cyklickej zámene) o rovnakej dĺžke a počte loptičiek (plynie z (ii) vo vetách o zámene strán a cyklickej zámene). Rovnako, ak je na vstupe nežonglovacia postupnosť, tak aj na výstupe dostaneme postupnosť nežonglovaciu. □

Príklad 2.10. Vezmime si napríklad postupnosť 4174[23] dĺžky 4.

4174 → 7441 → 5641 → 6415 → 5515 → 5155 → 2455 → 5245 → 3445 → 5344 → 4444

Algoritmus prebehol do konca a zistili sme, že na vstupe bola žonglovacia postupnosť o 4 loptičkách.

Príklad 2.11. Vezmime si postupnosť 124. Je zjavné, že nebude žonglovacou, keďže nespĺňa ani nutnú podmienku celočíselného aritmetického priemeru.

124 → 412 → 232 → 322

Na výstupe sme dostali nekonštantnú postupnosť, čo je očakávaný výsledok.

Vygenerujme si teraz všetky žonglovacie postupnosti pre 3 loptičky[24] s periódou 3 (Obrázok 24). Vezmime si najvyšší možný hod pre n loptičiek v siteswape periódy p. Bude ním hod $n \cdot p$ v postupnosti $(n \cdot p)00 \ldots 0$. V našom prípade je to teda siteswap 900. Začneme najvyšším hodom a postupným prevádzaním zámeny strán a cyklických zámen prejdeme všetkými možnosťami, až po vyhladenú postupnosť 333.

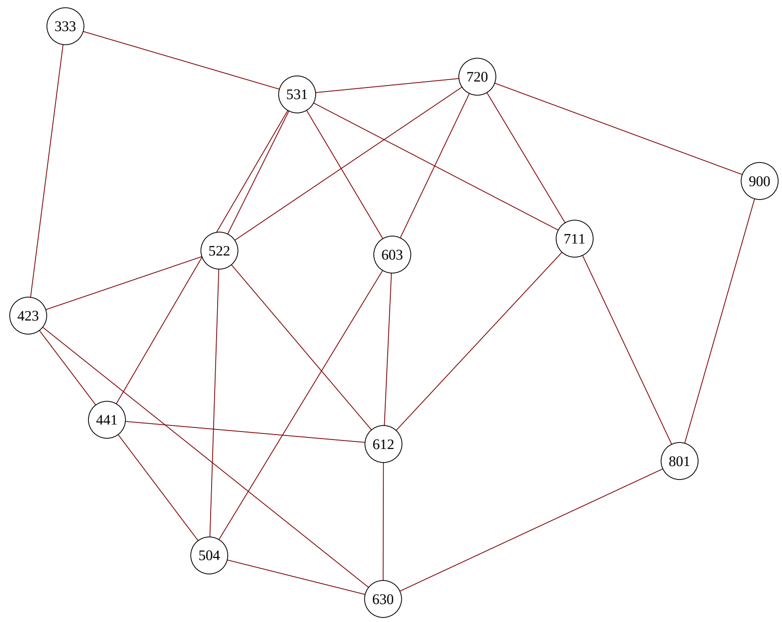
2.5 Počet žonglovacích postupností

Jednou z hlavných otázok v matematike žonglovania je počet všetkých žonglovacích postupností, ktoré môže žonglér prevádzať. Počet loptičiek, dĺžka žonglovacej postupnosti, maximálna výška hodu. Toto všetko ovplyvňuje výsledok tejto úlohy. Samozrejme, ak by sme neobmedzili ani jeden z týchto vplyvov, odpoveď by bola nekonečno. Ak by sme obmedzili len jeden faktor, stále by existovalo nekonečne veľa možností (v prípade vynechania triviálnych možností ako počet loptičiek 0 a podobne). Rovnako, výsledok nekonečno obdržíme, ak by sme obmedzili maximálnu výšku hodu a počet loptičiek (opäť vynecháme triviálne možnosti).

Ohraničíme si teda v prvom rade dĺžku p siteswapu a hľadáme riešenia s koneč-

[23] Príloha A - /siteswapy/14_4174.jml

[24] Príloha A - /siteswapy/15_3lopticky/

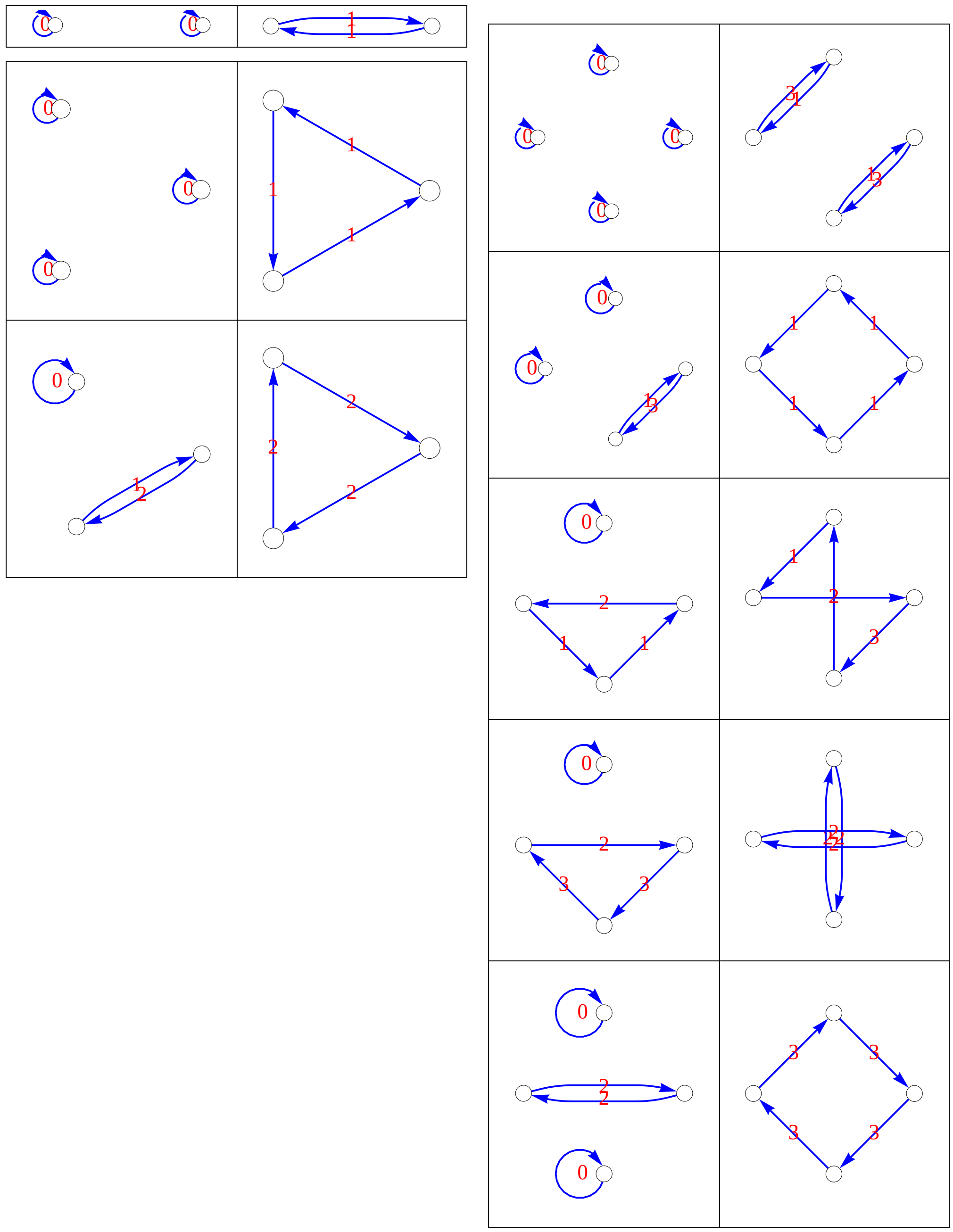


Obr. 24: Graf prechodu všetkých možností žonglovacích postupností pre 3 loptičky na perióde 3. Jednotlivé vrcholy sú žonglovacie postupnosti, hrany spájajú možný prechod medzi postupnosťami užitím zámeny strán a cyklických zámen.

ným počtom možností. Pozrime sa na generátory takto ohraničených žonglovacích postupností (Obrázok 25)[25]. Pretože každá loptička plynule prechádza svoju orbitu, vytvára v cyklickom diagrame cyklus. Cyklický diagram je orientovaný rovinný graf obsahujúci len cykly a slučky. Počet takýchto grafov je konečný. Pomocou cyklického diagramu veľmi jednoducho vygenerujeme všetky žonglovacie postupnosti danej dĺžky. Stačí nám ľubovoľne pričítať násobok periódy k výške hodu v ľubovoľný úder. Ako dôsledok vety o aritmetickom primere je súčet násobkov jednotlivých pričítaní rovný počtu loptičiek, ktorý sme takto pridali.

Ohraničením maximálnej výšky hodu h dostávame nanajvýš $(h+1)^p$ možností, čo je počet všetkých permutácií dĺžky p výšok hodov vrátane nulového hodu. Maximálny

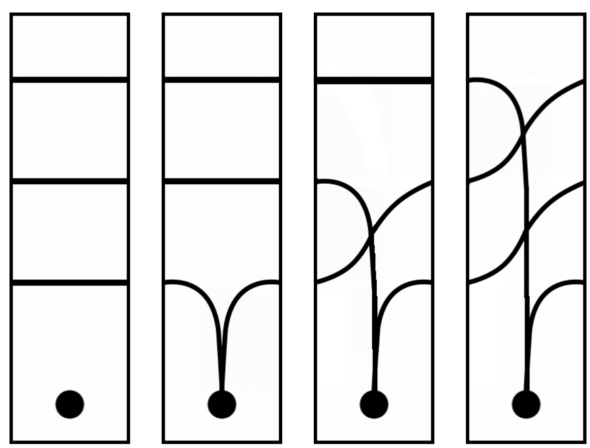
[25]Príloha A - /siteswapy/16_gen_2lopticky/, /siteswapy/17_gen_3lopticky/, /siteswapy/18_gen_4lopticky/



Obr. 25: Cyklické grafy žonglovacích postupností podľa periódy, až na izomorfizmus. Pre periódu 2 existujú len 2 možnosti, pre periódu 3 sú 4 možnosti, pre periódu 4 je možností 10.

počet loptičiek bude zrejme podľa vety o aritmetickej postupnosti v tomto prípade h, keďže postupnosť s najvyššími hodmi by bola $h \dots h$.
Rovnako ohraničením dĺžky siteswapu p a počtu loptičiek l dostávame konečný počet možností. Možný najvyšší hod by bol hod $l \cdot p$ v postupnosti $(l \cdot p)0 \dots 0$ a ako bolo už ukázané, pre tento prípad máme žonglovacích postupností konečne mnoho, nanajvýš $(l \cdot p + 1)^p$.
Zafixovaním presného počtu loptičiek l pri postupnosti dĺžky p dostávame taktiež samozrejme konečne mnoho možností. Je ich určite menej ako možností pre maximálne l loptičiek.
Počet žonglovacích postupností s ohraničenou dĺžkou, počtom loptičiek a maximálnou výškou hodu je tým pádom taktiež konečný.

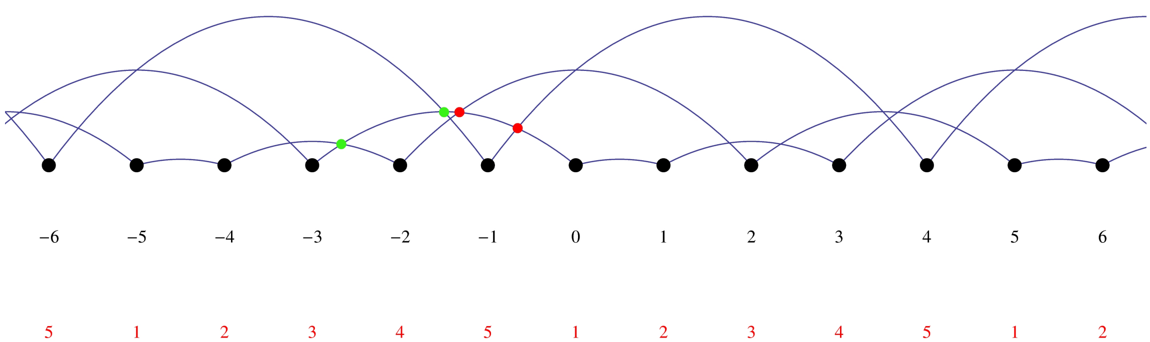
Označme počet všetkých siteswapov pre nanajvýš l loptičiek o perióde p ako $S(l,p)$. Na spočítanie presného výsledku použijeme princíp takzvaných žonglovacích kariet (Obrázok 26). Žonglovaciu postupnosť dĺžky p o l loptičkách môžeme jednoznačne



Obr. 26: Žonglovacie karty K_0, K_1, K_2 a K_3 pre 3 loptičky.

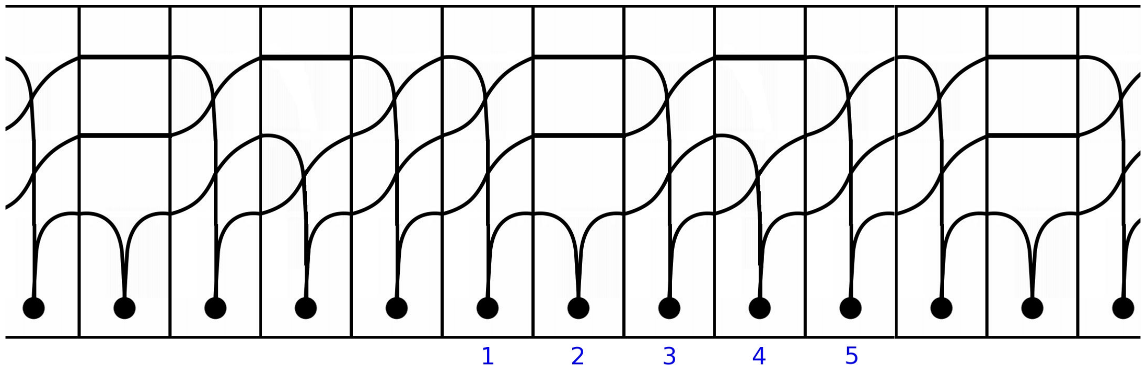
reprezentovať ako p-ticu zostavenú z $l+1$ typov kariet a naopak, každá takáto p-tica odpovedá žonglovacej postupnosti. Karty spolu vytvárajú diagram podobný tomu základnému. Každá karta obsahuje práve jeden úder a vodorovné úsečky, alebo oblúky smerom dole a hore, v celkovom počte rovnakom ako počet loptičiek (orbít). Všetky karty na seba naväzujú. Do každého úderu môže viesť len jedna orbita a preto môže mať každá karta najviac jeden oblúk zahnutý dole, do bodu značiaceho úder. Oblúk hore posúva loptičku vždy o jeden stupeň vyššie na nasledovnej karte. Usporiadanie oblúkov a priamok je na kartách nasledovné: najnižšie sú po rade všetky oblúky hore, potom nasleduje oblúk dole a nad ním sú vodorovné úsečky. Existuje $l + 1$ takýchto kariet (stačí spočítať všetky možnosti oblúku dole a pričítať nulovú kartu). Nulový hod bude obsahovať karta úsečiek - *nulová karta*. Každá iná karta obsahuje nejaký hod.

Vytvoríme na konkrétnom príklade z danej žonglovacej postupnosti súbor žonglovacích kariet.



Obr. 27: Základný diagram siteswapu 12345 s vyznačením priesečníkov nad spätným oblúkom z úderu 0.

Príklad 2.12 (Obrázky 27 a 28)**.** Vezmime si postupnosť 12345. Na základnom diagrame zistíme koľko krát sa loptička "prepadla" a "stúpla". Pôjdeme od daného úderu (v Obrázku 27 vyberáme úder 0) naspäť po oblúku hodu, ktorý práve dopadol a počítame priesečníky s ostatnými oblúkmi. Ak nami volený oblúk pretína iný oblúk a prechádza po spiatočnej ceste zvnútra von, nakreslíme červený bod, ak prechádza do vnútra iného oblúku, kreslíme bod zelený. Sčítame počet červených bodov c a spomedzi kariet priradíme danému úderu kartu K_{c+1}. Hodu výšky nula priradíme vždy kartu K_0.



Obr. 28: Karty žonglovacej postupnosti 12345.

Na úder 0 teda použijeme kartu K_3, úderu 1 priradíme kartu K_1, pokračujeme kartami K_3, K_2 a K_3.

Nasledujúce vety plynú bezprostredne z predošlej konštrukcie.

Veta 2.12 ((8), s. 40). *Počet všetkých možností ako vytvoriť žonglovaciu postupnosť o dĺžke p a nanajvýš l loptičkách je:*

$$S(l, p) = (l + 1)^p$$

Všimnime si, že ak by sme v každom ťahu vybrali kartu obsahujúcu aspoň jednu horizontálnu úsečku, nami vytvorená žonglovacia postupnosť by obsahovala menej ako l loptičiek.

Veta 2.13 ((8), s. 40). *Počet všetkých možností ako vytvoriť žonglovaciu postupnosť o dĺžke p a l loptičkách je:*

$$\overline{S(l, p)} = S(l, p) - S(l - 1, p) = (l + 1)^p - l^p$$

V tomto výsledku sú však stále obsiahnute možnosti, ktoré by žongléra neuspokojili. Pokúsime sa teda náš výsledok vylepšiť. V prvom rade obmedzíme cyklickú výmenu. Pre periódu postupnosti p jestvuje p cyklických zámen danej postupnosti. Taktiež nás nebudú zaujímať postupnosti, ktoré nie sú vzorom. Napríklad 737373[26]

[26]Príloha A - /siteswapy/19_737373.jml

je pre nás rovnaký siteswap ako jeho vzor 73[27]. Všetky minimálne podpostupnosti našej postupnosti sú zrejme dĺžky d takej, že d delí p. $MS(l,p)$ nazveme počet všetkých minimálnych žonglovacích postupností bez cyklickej zámeny dĺžky p o l loptičkách. Počet všetkých žonglovacích postupností dĺžky p o l loptičkách je rovný súčtu všetkých takýchto minimálnych podpostupností s pripočítaním ich cyklických zámen. Z toho plynie vzťah:

$$S(l,p) = (l+1)^p - l^p = \sum_{d|p} d \cdot MS(l,d)$$

Pre vyjadrenie $MS(l,d)$ použijeme Möbiovu inverziu:
Ak f a g sú funkcie definované na $\mathbb{N}$ tak, že

$$f(p) = \sum_{d|p} g(d),\ \forall p \in \mathbb{N}$$

potom

$$g(p) = \sum_{d|p} \mu(\frac{p}{d}) f(d)$$

kde μ je Möbiova funkcia:

$$\mu(q) = \begin{cases} 1 & \text{ak } q = 1 \text{ alebo } q \text{ má párny počet rozdielnych prvočíselných deliteľov} \\ -1 & \text{ak } q \text{ má nepárny počet rozdielnych prvočíselných deliteľov} \\ 0 & \text{ak } q \text{ obsahuje viacnásobné prvočíselné delitele} \end{cases}$$

Veta 2.14 ((8), s. 40)**.** *Počet minimálnych žonglovacích postupností dĺžky p o l loptičkách bez cyklickej zámeny je:*

$$MS(l,p) = \frac{1}{p} \sum_{d|p} \mu(\frac{p}{d})((l+1)^d - l^d)$$

Dôkaz. Plynie bezprostredne z predošlého textu. Dôkaz Möbiovej inverzie je možné nájsť v HALL (4). □

[27] Príloha A - /siteswapy/19_73.jml

Príklad 2.13. Zistime počet všetkých žonglovacích postupností dĺžky $p = 5$ o a) maximálne $l = 7$, b) práve $l = 7$ loptičkách. c) počítajme len minimálne postupnosti o práve 7 loptičkách bez cyklických zámen.

a) zo vzťahu $S(l, p) = (l + 1)^p$ nám okamžite plynie výsledok $S(7, 5) = 32768$

b) počítame $\overline{S(7, 5)} = S(7, 5) - S(6, 5) = 32768 - 16807 = 15961$

c) vyjadríme si:

pre $d = 1, 5$;
$\mu(\frac{5}{1}) = \mu(5) = -1$, pretože 5 má len jedného prvočíselného deliteľa a to samého seba.
$\mu(\frac{5}{5}) = \mu(1) = 1$
$MS(7, 5) = \frac{1}{5}\sum_{d|5}\mu(\frac{5}{d})(7 + 1)^d - 7^d) = \frac{1}{5}((-1)(8 - 7) + 1(8^5 - 7^5)) = 3192$

Pozrime sa ešte na správanie MS pri malých periódach:

$MS(l, 1) = 1$ je to jedine siteswap l

$MS(l, 2) = l$ sú to zrejme všetky siteswapy: $(2l)0, (2l - 1)1, (2l - 2)2 \ldots (l + 1)(l - 1)$
jednoduchým výpočtom pomocou vzorca získavame hodnoty:

$MS(l, 3) = l(l + 1)$

$MS(l, 4) = l(l^2 + l + 1)$

$MS(l, 5) = l(l^3 + 2l^2 + 2l + 1)$

$MS(l, 6) = l(l^4 + \frac{5}{2}l^3 + \frac{10}{3}l^2 + 2l + \frac{1}{6})$

2.6 Multiplexové žonglovanie

Bolo by snáď veľmi nematematické prikázať žonglérovi, aby žongloval podľa pravidiel prostého žonglovania. Naopak, popíšeme matematicky všeobecnejší prípad vyhadzovania loptičiek, keď žonglér poruší pravidlo vyhadzovania nanajvýš jednej loptičky na daný úder.

Definícia 2.8 (Vlastnosti multiplexového žonglovania)**.**

(i) Loptičky sú žonglované do konštantných úderov, a teda začiatky hodov odpovedajú diskrétnym momentom v čase.

(ii) Uvažujeme, že žonglér vždy žongloval a nikdy neprestane.

(iii) Ak je loptička chytená v daný úder, je v ten istý úder aj hodená.

Multiplexové žonglovanie je teda v praxi žonglovanie, pri ktorom žonglér vyhadzuje a chytá ľubovoľný počet loptičiek. Všimnime si, že žonglérovi stačí stále len jedna ruka. Ak si predstavíme žongléra s dvomi rukami, opäť bude hod nepárnej výšky smerovať do druhej ruky a hod párnej výšky do ruky tej istej. Žonglovanie s viacerými hodmi v daný úder si však môžeme predstaviť aj tak, že sa snažíme popísať hody niekoľkých prekrývajúcich sa žonglérov hádžucích v rovnakom rytme (na rovnaké údery), pričom každý žongluje s vlastnou sadou loptičiek. Multiplex je teda zložením viacerých prostých žonglovacích postupností. Ak si vezmeme multiplex o jednej žonglovacej postupnosti, dostávame prostú žonglovaciu postupnosť.

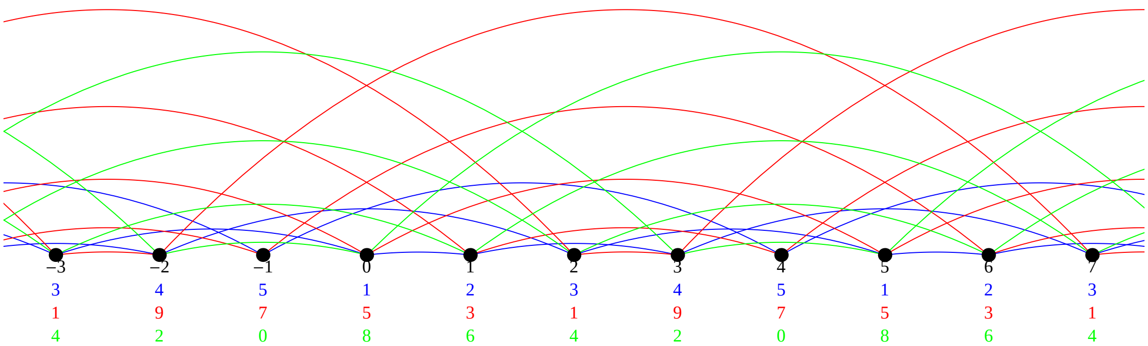
Zápis multiplexových žonglovacích postupností bude veľmi podobný zápisu, ktorý sme používali pri prostých žonglovacích postupnostiach. Multiplexovú žonglovaciu postupnosť budeme nazývať aj multiplexový siteswap alebo skrátene multiplex. Na každej pozícii v postupnosti bude miesto jednej výšky hodu celá množina výšok všetkých hodov prevedených v daný úder. V žonglérskom zápise sa tieto množiny píšu do hranatých zátvoriek. Pre ilustráciu slúži Obrázok 29[28].

Definícia 2.9 (Multiplexová žonglovacia postupnosť (multiplex))**.** Nech $m_i = \{h^i_k\}_{k=0}^{p-1}$ sú konečné postupnosti nezáporných celých čísel, $i \in (1 \dots n)$, potom postupnosť vytvorená z týchto postupností nasledovne:

[28] Príloha A - /siteswapy/20__158_236_314_492_570.jml, siteswapy/20_86420.jml

$$[h_0^1 h_0^2 \dots h_0^n][h_1^1 h_1^2 \dots h_1^n] \dots [h_{p-1}^1 h_{p-1}^2 \dots h_{p-1}^n]$$

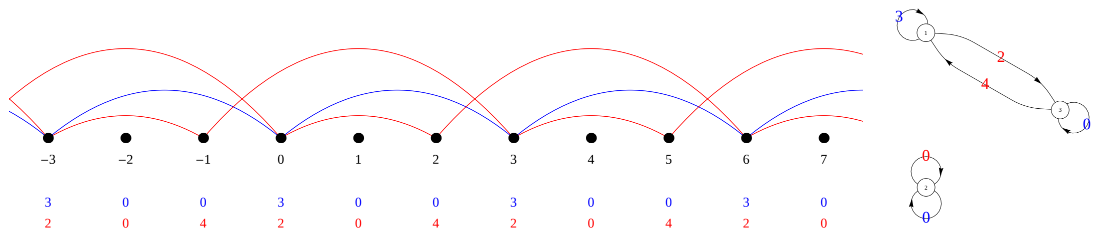
sa nazýva *multiplexová žonglovacia postupnosť* práve vtedy, keď každá funkcia $\phi^i :$ $\mathbb{Z} \to \mathbb{N}^0$, ktorá priradí $\forall q \in \mathbb{Z} : \phi^i(q) = h^i_{q \mod p}$, je prostá žonglovacia funkcia.



Obr. 29: Multiplexový siteswap [158][236][314][492][570], zložený zo siteswapov 12345, 53197 a 86420

Ak multiplexová postupnosť obsahuje nulové hody, žongléri ich v zápise vynechávajú. V prípade, že na daný úder sa prevedie len jeden hod, tak sa vynechávajú aj zátvorky. Ak sa neprevedie žiaden hod, respektíve všetky hody sú nulové, píšeme 0 bez zátvoriek. Napríklad multiplex zložený z postupností $m_1 = 300$ a $m_2 = 204$ zapíšeme ako [32]04 (Obrázok 30)[29]. V matematickom zápise nám to však môže spôsobiť komplikácie. Uvažujme nasledovné ofarbenie loptičiek. Všetky loptičky z m_1 sú modrej farby a loptičky m_2 sú farby červenej. Každý hod o výške 3 z m_1 dopadne súčasne s nejakým hodom výšky 4 z m_2 (posunutým o jednu periódu dozadu). Priamo zo zápisu však nie je jednoznačne vidieť, či hod o výške 4 patrí m_1 alebo m_2. Tým pádom sa nám pokojne môže stať, že zameníme pri vyhadzovaní hodu [32] vzájomne modrú a červenú loptičku. Považujme teda zápis s možným vynechaním zátvoriek za zápis *nezávislý na ofarbení*, alebo *jednofarebný*, na rozdiel od zápisu v definícii, ktorý je *na ofarbení loptičiek závislý*. Závislosť (nezávislosť) na ofarbení je závislosť (nezávislosť) na usporiadaní v hranatých zátvorkách.

[29]Príloha A - /siteswapy/21__32_04.jml, /siteswapy/21_204.jml, /siteswapy/21_300.jml



Obr. 30: Multiplexový siteswap [32]04 v základnom a cyklickom diagrame. Modrou farbou je znázornený siteswap 300 a červenou 204.

Pre orbity v multiplexovom žonglovaní platia rovnaké pravidlá, ako pri prostých žonglovacích funkciách. Každá orbita je popisom hodov jednej loptičky a všetky orbity sú bez prerušení. Počet orbít odpovedá počtu loptičiek použitého v multiplexe. Rovnako teda v základnom diagrame zistíme počet loptičiek preložením vertikálnej priamky a spočítaním jej priesečníkov s oblúkmi v grafe.

Multiplex sa skladá z prostých žonglovacích postupností a preto pre počet loptičiek musí platiť nasledovná veta:

Veta 2.15 (Veta o aritmetickom priemere pre multiplexové žonglovacie postupnosti, (8), s. 67)**.** *Počet loptičiek potrebných pre žonglovanie multiplexovej žonglovacej postupnosti*

$$[h_0^1 h_0^2 \dots h_0^n][h_1^1 h_1^2 \dots h_1^n] \dots [h_{p-1}^1 h_{p-1}^2 \dots h_{p-1}^n]$$

je rovný jej aritmetickému priemeru $\dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{p-1} h_k^i}{p}$.

Dôkaz. Pre každú prostú žonglovaciu postupnosť $m_i, \forall i \in \mathbb{N}$ platí, že počet loptičiek potrebný pre jej žonglovanie je rovný jej aritmetickému priemeru $\frac{\sum_{k=0}^{p-1} h_k^i}{p}$. Súčtom loptičiek všetkých prostých postupností vytvárajúcich multiplex je výsledný počet loptičiek, preto môžeme vyjadriť:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\sum_{k=0}^{p-1} h_k^i}{p} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{p-1} h_k^i}{p}$$

□

Táto veta nám zároveň dáva silný nástroj k tomu, aby sme mohli previesť test platnosti multiplexu. Ak aritmetický priemer všetkých hodov v multiplexovom siteswape nie je celočíselný, je zrejmé, že postupnosť je neplatná.

Zovšeobecníme pre multiplexové použitie aj skúšku permutácie a skúšky diagrammi.

Skúška permutácie pre multiplex

Ak si rozdelíme multiplexovú postupnosť zloženú z n postupností na jednotlivé siteswapy, pre každý z nich platí skúška permutácie, a teda pričítaním každého úderu k výške hodu naň prevedeného dostávame permutáciu dĺžky rovnej dĺžke siteswapu. Takto dostaneme n permutácii a náš test sa nijak nelíši od toho pre prosté postupnosti.

V prípade jednofarebného zápisu (s možným vynechaním zátvoriek) budeme musieť test upraviť. Opäť ku každej výške hodu v postupnosti pričítame jej úder a nájdeme tak čas dopadu (počítame v $\mathbb{Z}_p$ takže je to pozícia v postupnosti) vyhodenej loptičky. Každá dopadnutá loptička je ihneď vyhodená, preto množstvu rovnakých časov dopadu rozličných hodov musí odpovedať rovnaké množstvo hodov prevedených v čas dopadu.

Príklad 2.14. [30] Nech je daný multiplex [61][53][23]0 v žonglérskom zápise. Na prvý pohľad nevieme odhadnúť z akých postupností sa skladá. Počet loptičiek však zistíme jednoducho. Perióda je 4 a môžeme podľa vety o aritmetickom priemere počítať

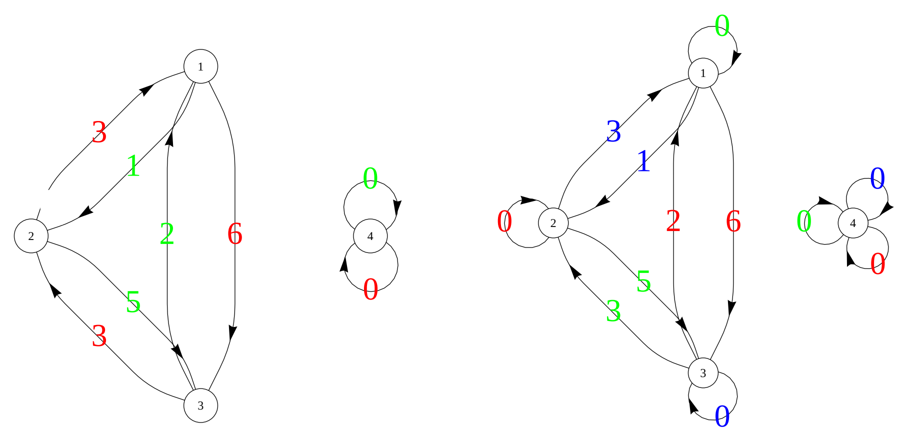
$$\frac{[6+1]+[5+3]+[2+3]+0}{4} = \frac{20}{4} = 5 \text{ loptičiek.}$$

Aritmetický priemer je teda celočíselný. Prevedieme test permutácie. Hodom pričítame ich údery

[30] Príloha A - /siteswapy/22__61_53_23_0/

$$([(6+0)(1+0)][(5+1)(3+1)][(2+2)(3+2)](0+3)) \mod 4 = [21][20][01]3.$$

Na údery 0, 1 a 2 sú prevedené 2 hody a na úder 3 je prevedený len jeden nulový hod, preto dopady na úder 0, 1 a 2 sú po dvoch a úder 3 je len jeden. Výsledok je teda správny. Tento multiplex môžeme rozložiť napríklad na dve žonglovacie postupnosti 6330 a 1520 o troch a dvoch loptičkách alebo na tri postupnosti 6020, 0530, 1300 po rade o dvoch, dvoch a jednej loptičke.



Obr. 31: Multiplexový siteswap [61][53][23]0 rozložený na dve a tri ofarbenia.

Skúška diagramom

V základnom aj cyklickom diagrame vieme veľmi rýchlo skontrolovať platnosť multiplexovej postupnosti. Počet oblúkov (šípiek) vchádzajúcich do bodu v základnom (cyklickom) diagrame je rovný počtu oblúkov (šípiek) z tohto bodu vychádzajúcich. Oblúky (šípky) na seba naväzujú a tvoria tak orbitu jednej loptičky. Do bodu označujúceho úder vchádza nanajvýš (práve) toľko oblúkov (šípiek), koľko postupností daný multiplex vytvára. (Obrázky 30, 31)

2.7 Počet multiplexových žonglovacích postupností

Systém žonglovacích kariet, ktorý sa nám osvedčil pri získavaní počtu všetkých prostých žonglovacích postupností použijeme aj v tomto prípade. Vytvoríme si žonglovacie karty pre multiplexové žonglovanie. Ak by sme počítali ofarbené multiplexy zložené z n postupností o $b_1 \dots b_n$ loptičkách a perióde p, použijeme pre každú postupnosť sadu inej farby už vytvorených kariet ako v Obrázku 26. Celkový počet možností by bol $((b_1 + 1) \cdot (b_2 + 1) \cdot \dots \cdot (b_n + 1))^p$.

Spočítajme možnosti pre jednofarebné multiplexy dĺžky p o l loptičkách. Počty hodov na každý úder nazveme $r_i, i \in \{0, \dots, l\}$. Karty rozlíšime podľa počtu hodov r_i v hranatých zátvorkách. Pre 0 a 1 hod v daný úder budú karty rovnaké ako v Obrázku 26, keď sme počítali možnosti prostých siteswapov. Pre 2 až n hodov na jeden úder vytvoríme nové karty. Na každej karte K_i bude zľava r_i oblúkov smerovať do úderu. Počet možností karty pre r_i takýchto oblúkov je $\binom{l}{r_i}$. Systémom totožným ako je popísaný v podkapitole 2.5. vieme vygenerovať všetky žonglovacie postupnosti. Počet všetkých takýchto kariet bude $\displaystyle\sum_{i=0}^{l} \binom{l}{r_i}$, čo je počet všetkých podmnožín množiny o l prvkoch a ten je rovný 2^l. Všetky permutácie týchto kariet vytvoria všetky multiplexové žonglovacie postupnosti, preto môžme sformulovať vety:

Veta 2.16 ((8), s. 71)**.** *Počet všetkých jednofarebných multiplexových žonglovacích postupností $M(p, l)$ o perióde p a nanajvýš l loptičkách je*

$$M(p, l) = 2^{pl}.$$

Veta 2.17 ((8), s. 71)**.** *Počet všetkých jednofarebných multiplexových žonglovacích postupností $\overline{M(p, l)}$ o perióde p a l loptičkách je*

$$\overline{M(p, l)} = M(p, l) - M(p, l - 1) = 2^{pl} - 2^{p(l-1)}.$$

Dôkazy predošlých viet plynú z textu nad nimi.

2.8 Zovšeobecnenie pre viac rúk

Až doposiaľ sme sa držali konvencie, že nám na žonglovanie stačí jedna ruka. Síce sme hovorili o tom, že nepárne výšky hodov smerujú do druhej ruky, ako tá, z ktorej sme loptičku vyhadzovali, a hody párnych výšok sa po nejakom čase vrátia do tej istej ruky, bolo to viac-menej len pre lepšiu predstavu a blízkosť k reálnemu žonglérovi. Položme si teda otázku, čo sa stane, ak si vopred určíme počet rúk, ktorými budeme žonglovať. Praktické využitie je celkom zrejmé, nakoľko žongléri radi predvádzajú svoju zručnosť pri žonglovaní v pároch, či väčších skupinách a vytvárajú tak komplexné sústavy trikov. V nasledujúcej podkapitole budeme ďalej generalizovať žonglovacie postupnosti.

Za viacručné žonglovanie budeme považovať takzvané synchrónne žonglovanie. To znamená, že hody prevádzame na jeden úder súčasne všetkými rukami, ktoré využívame, na rozdiel od asynchrónneho žonglovania, pri ktorom, ak sme uvažovali viac rúk, sme stále vykonávali len hod z jednej ruky na jeden úder. Asynchrónne žonglovanie dvomi rukami sme si zobrazili v rebríkovom diagrame (Obrázok 20). Ak by sme viacručne žonglovali len prosté siteswapy, vlastnosti žonglovania by boli takmer identické ako tie u ofarbených multiplexov. Viac hodov z jednej ruky u multiplexov by znamenalo viac hodov na jeden úder u viacručného žonglovania. Nič nám však vo viacručnom žonglovaní nebráni hádzať viac multiplexových hodov súčasne.

Definícia 2.10 (Vlastnosti viacručného žonglovania)**.**

(i) Loptičky sú žonglované do konštantných úderov, a teda začiatky hodov odpovedajú diskrétnym momentom v čase.

(ii) Uvažujeme, že žonglér vždy žongloval a nikdy neprestane.

(iii) Všetky loptičky, ktoré sú na daný úder chytené do nejakej ruky, sú z tejto ruky v ten istý úder vyhodené.

Na rozdiel od predstavy, ktorú sme si mohli utvoriť pri multiplexoch, keď sme popísali viac súčasne žonglujúcich žonglérov s vlastnou sadou loptičiek, si teraz predstavíme viac žonglérov, ktorí si môžu loptičky ľubovoľne prehadzovať, nevynímajúc multiplexové hody.

V zápise je potrebné každému hodu priradiť ruku, do ktorej smeruje a zároveň ku každej ruke musíme zapísať hody z nej prevedené. Vytvoríme si preto *žonglovaciu maticu* výšok hodov $r \times p$ tak, že každý riadok [31] matice prislúcha jednej ruke z celkového počtu r rúk, stĺpce matice prináležia jednotlivým úderom na dĺžke intervalu p. Ľavý dolný index označuje ruku, do ktorej smeruje loptička pri tomto hode. Viď nasledovný príklad.

Príklad 2.15. Viacručná multiplexová žonglovacia matica.

$$\begin{pmatrix} [{}_2 1 {}_1 3] & [{}_3 3 {}_1 5] & [{}_2 5 {}_2 5] & [0 {}_1 1] \\ [{}_3 1 {}_3 4] & [{}_3 5 {}_2 4] & [{}_1 6 {}_3 1] & [{}_1 3 {}_1 6] \\ [{}_2 4 {}_2 4] & [{}_1 4 {}_2 1] & [{}_3 10] & [{}_2 3 {}_3 6] \end{pmatrix}$$

Popíšme orbitu prvej loptičky prvej ruky. Loptička je hodená do druhej ruky o výške 1, následne do tretej ruky o výške 5, opäť do tretej ruky o výške 1, odtiaľ do druhej ruky o výške 3, až napokon sa vracia do prvej ruky hodom výšky 6.

Viacručné žonglovanie sme skonštruovali z multiplexových postupností. Rovnako teda bude platiť aj veta o aritmetickom priemere:

Veta 2.18 (Veta o aritmetickom priemere pre viacručné multiplexové žonglovanie, (8), s. 89)**.** *Počet loptičiek potrebných na žonglovanie žonglovacej matice je rovný súčtu všetkých jej členov vydeleného počtom úderov.*

Dôkaz. Žonglovacia matica je zovšeobecnením multiplexovej postupnosti. Z definície žonglovacej matice a Vety o aritmetickom priemere pre multiplexové postupnosti plynie aj platnosť danej vety. □

Príklad 2.16. Počet loptičiek v žonglovacej matici v príklade je $\frac{76}{4} = 19$.

[31]Pozor, každý riadok je len súbor hodov z danej ruky, nie je to žonglovacia postupnosť. Žonglovacie postupnosti vznikajú prechádzaním medzi rukami. Rovnako tak aj orbity jednotlivých loptičiek.

Rovnako tak, vzhľadom na konštrukciu žonglovacej matice zavedieme skúšku permutácie. Pripočítaním hodnoty úderu ku každému hodu pri počítaní v $\mathbb{Z}_p$ získavame permutácie dĺžky p, vzhľadom na riadok indukovaný ľavým dolným indexom a vzhľadom na pozíciu v zátvorke. Skúšku si ukážeme priamo na konkrétnom príklade.

Príklad 2.17. Z predchádzajúceho príkladu dostávame:

$$\begin{pmatrix} [{}_2(1+0)_1(3+0)] & [{}_3(3+1)_1(5+1)] & [{}_2(5+2)_2(5+2)] & [(0+3)_1(1+3)] \\ [{}_3(1+0)_3(4+0)] & [{}_3(5+1)_2(4+1)] & [{}_1(6+2)_3(1+2)] & [{}_1(3+3)_1(6+3)] \\ [{}_2(4+0)_2(4+0)] & [{}_1(4+1)_2(1+1)] & [{}_3(1+2)(0+2)] & [{}_2(3+3)_3(6+3)] \end{pmatrix} \mod 4$$

$$= \begin{pmatrix} [{}_2 1_1 3] & [{}_3 0_1 2] & [{}_2 3_2 3] & [3_1 0] \\ [{}_3 1_3 0] & [{}_3 2_2 1] & [{}_1 0_3 3] & [{}_1 2_1 1] \\ [{}_2 0_2 0] & [{}_1 1_2 2] & [{}_3 3 2] & [{}_2 2_3 1] \end{pmatrix}$$

Počet dopadov na údery $0, 1, 2, 3$ s indexom každej ruky musí byť rovnaký ako počet hodov v každom multiplexe. Máme teda napríklad dve 0 s indexom 1, 2 a 3 a podobne pre ostatné údery.

Tento zápis používame najmä pri žonglovaní skupiny ľudí - takzvaný passing. Pre synchrónne žonglovanie jedného žongléra, teda dve ruky sa tradične používa obmena maticového zápisu. Nakoľko by sme mali len dva riadky: jeden pre pravú a ľavú ruku, zapíšeme ich miesto do dvoch riadkov do jednej okrúhlej zátvorky, oddeľujúc obe ruky čiarkou. Aby toho nebolo málo, žongléri v synchrónnych trikoch zapisujú všetko párnymi číslami, teda akoby sme brali len každý druhý úder. Je to z toho dôvodu, že takéto výšky hodov sú rovnaké ako tie u asynchrónnych (prostých) siteswapov. Písmeno x za číslom znamená, že hod smeruje do druhej ruky. Synchrónna fontána so 4 loptičkami bude vyzerať takto: $(4, 4)$[32]. Žonglujeme 2 loptičky v každej ruke, s výhodmi vždy na rovnaký úder. Pre žonglérov je pomerne známa synchrónna

[32]Príloha A - /siteswapy/23_44.jml

polovičná sprcha $(6x, 4x)$[33] o piatich loptičkách. Z pravej ruky hádžeme do ľavej loptičku, ktorá dopadne za 3 údery a z ľavej do pravej loptičku dopadajúcu za 2 údery. Pre symetrické siteswapy typu $(6x, 4)(4, 6x)$[34] je zaužívaný skrátený zápis s hviezdičkou: $(6x, 4)(4, 6x) = (6x, 4)^*$. Ľubovoľne môžeme miesto jednoduchých hodov písať multiplexy v hranatých zátvorkách. Napríklad $([68], [4x2])(2x, [2x4])([4x2x], 2x)^*$[35] je siteswap pre 2 ruky s použitím multiplexov v žonglérskom zápise pre 6 loptičiek.

[33]Príloha A - /siteswapy/24_6x4x.jml
[34]Príloha A - /siteswapy/25_6x4_46x.jml, /siteswapy/25_6x4+.jml
[35]Príloha A - /siteswapy/26__684x22x2x44x2x2x+.jml

3 Uniformné žonglovanie

V sedemdesiatych rokoch, časoch, keď ešte myšlienka siteswapov čakala na svoj zrod, sa Claude Elwood Shannon snažil vytvoriť žonglovacieho robota. To sa mu nakoniec aj podarilo a vynašiel preň matematický podklad, ktorý spísal do niekoľkých matematických viet, dnes nazývaných Shannonove vety o žonglovaní. Ozrejmime si úvahy v jeho práci SHANNON (9), dôkazy viet v tejto časti vynecháme.

Definícia 3.1 (Uniformné žonglovanie)**.** Uvažujme žonglovanie, pri ktorom je použitých r rúk a l loptičiek. Označíme si čas rôznych javov v žonglovaní nasledovne:

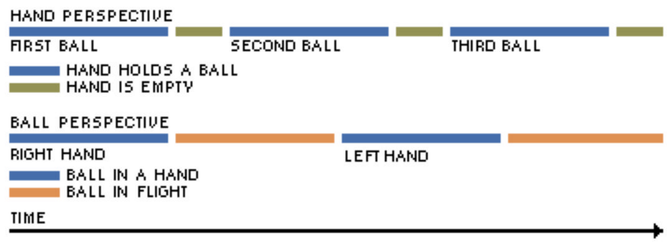
- Čas držania loptičky, alebo ruky d je čas, počas ktorého je ktorákoľvek loptička držaná v ktorejkoľvek ruke, to jest čas medzi chytením a vyhodením.
- Čas letu loptičky f je čas, počas ktorého je každá loptička vo vzduchu, to jest čas medzi vyhodením a chytením.
- Čas voľnosti ruky v je čas, počas ktorého je každá ruka voľná, to jest čas medzi vyhodením a chytením.

Žonglovanie, ktoré sme takto popísali nazývame *uniformné žonglovanie*.

Veta 3.1 (Shannonova prvá veta o žonglovaní, (8), s. 98)**.** *V uniformnom žonglovaní platí:*

$$\frac{f+d}{v+d} = \frac{l}{r}$$

Pozrime sa na vetu z dvoch pohľadov ako v Obrázku 32. Ak sa budeme zaujímať o to, čo sa deje s loptičkou, tak vidíme, že $f+d$ je čas, za ktorý loptička využije jednu ruku a dostáva sa do ďalšej ruky. Preto vynásobením $r(f+d)$ dostávame celkový čas jednej loptičky, za ktorý prejde všetkými rukami a vráti sa do pôvodnej ruky.
Z pohľadu každej ruky platí, že čas, ktorý ju využíva jedna loptička je rovný súčtu času držania a času voľnosti $v+d$. Rovnako tak, čas, ktorý by prešiel, kým rukou prejdú všetky loptičky je $l(v+d)$.



Obr. 32: Uniformné žonglovanie z pohľadu ruky a z pohľadu loptičky. Modrou je znázornený čas držania, zelená značí čas voľnosti ruky, oranžová čas letu loptičky.

Zdroj: https://www2.bc.edu/~lewbel/jugweb/science-1.html

Všimnime si, že sme vlastne dvakrát spočítali rovnaký čas. Z pohľadu loptičky je to čas, ktorý loptička prejde všetkými rukami a vráti sa do prvej ruky. Z pohľadu ruky to je čas, za ktorý ňou prešli všetky loptičky, a nasleduje opäť prvá loptička.

Príklad 3.1. Pre 3 loptičky a 2 ruky je uniformným žonglovaním klasická kaskáda. Čas letu loptičky voľme napríklad $1,3s$, čas držania $0,2s$ a čas voľnosti ruky nám vychádza dopočítaním na $0,8s$.
Uvažujúc 4 loptičky a 2 ruky je možností viac. Buď to je asynchrónna fontána, keď z každej ruky vyhadzujeme loptičky postupne, alebo môžeme hádzať z oboch rúk naraz. Pri synchrónnych hodoch sa vždy môžeme ľubovoľne rozhodnúť, či budeme loptičky hádzať do oblúka (obe do druhej ruky) alebo do fontány (obe do ruky rovnakej). Nie každá loptička musí teda prejsť každou rukou.

Pozorujme hlbšie, čo sa deje s loptičkou a rukou počas uniformného žonglovania. Začneme rovnakým momentom pri pozorovaní loptičky aj ruky.
Loptička je vyhodená z ruky a prechádza jej čas letu, až kým dopadne do ďalšej ruky, kde je držaná a opäť vyhodená. Takto prejde loptička všetkými rukami, až kým sa nevráti do prvej ruky.
Ruka vyhodila loptičku a prechádza jej čas voľnosti, až kým dopadne ďalšia loptička, ktorá je rukou držaná a opäť vyhodená. Takto prejdú všetky loptičky touto rukou, až kým sa nevráti prvá loptička.

Veta 3.2 (Princíp duality v uniformnom žonglovaní, (8), s.97)**.** *Ak vo vete o uniformnom žonglovaní vzájomne vymeníme pojmy loptička a ruka, čas letu a čas voľnosti, je táto veta platná.*

Druhá a tretia veta hovoria o ďalších kombinatorických výsledkoch v uniformnom žonglovaní.

Veta 3.3 (Shannonova druhá veta o žonglovaní, (8), s. 100)**.** *Nech máme dané uniformné žonglovanie o l loptičkách a r rukách také, že l a r sú nesúdeliteľné, loptičky a ruky je možné usporiadať tak, že každá loptička prechádza po rade všetky ruky a každá ruka chytá po rade všetky loptičky.*

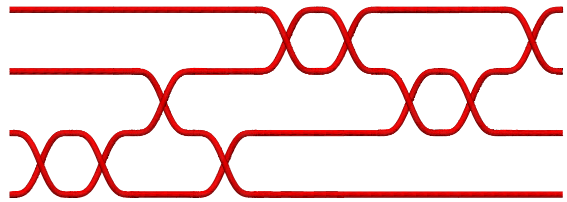
Veta 3.4 (Shannonova tretia veta o žonglovaní, [(8), s. 101)**.** *Možností uniformného žonglovania o l loptičkách a r rukách je toľko, koľko existuje rozkladov $N(l,r)$ na súčet prirodzených čísel, kde N(l,r) je najväčší spoločný deliteľ čísel l a r.*

Príklad 3.2. Pre 4 loptičky a 2 ruky je N(4,2)=2 a to môžeme zapísať dvomi spôsobmi: 2; 1 + 1. To odpovedá asynchrónnej a synchrónnej fontáne o 4 loptičkách. Synchrónne hádzanie do oblúkov vo vete považujeme za rovnaké ako do fontány.

Záver

Cieľom tejto práce bolo popísať žonglérske triky matematickými nástrojmi a oboznámiť čitateľa s výsledkami dosiahnutými v tejto oblasti. Najrozšírenejším zápisom, ako medzi žonglérmi, tak i v matematike, je dnes siteswapová notácia využívajúca celočíselné postupnosti. Okrem nej je zmienený aj prístup uniformného žonglovania, v ktorom, mimo iného, funguje, v matematike veľmi dôležitý, princíp duality. Žonglovanie nám tak dáva reálne využitie aritmetického priemeru, permutácií, grafov, kombinatoriky a ďalších matematických nástrojov. Užívanie praktických aplikácií matematiky v žonglovaní je vhodné pre lepšie upevnenie, či výuku týchto systémov. Obsiahnuť však všetky matematické teórie, ktorých sa žonglovanie dotýka, by bolo na niekoľko hrubých kníh. Pozrime sa na záver ešte v krátkosti na vzťah s teóriou uzlov a podobnosť s technikami change ringingu.

Predstavme si, že žonglujeme s horiacimi loptičkami, ktoré za sebou zanechávajú dymovú stopu. Postavíme sa oproti stene a začneme žonglovať, pohybujúc sa pri tom smerom vzad rovnomernou rýchlosťou. Dymová stopa každej loptičky opisuje jej dráhu. Pozorujúc žongléra z profilu a následne rovnobežným priemetom na priemetňu kolmo k nášmu pohľadu vytvárajú stopy obraz identický so základným diagramom definovaným pre siteswapy. Stopa vytvára orbitu loptičky. Pozorovaním žongléra zhora vytvárajú stopy diagram, v ktorom je presne vidieť ako sa „uzlili“ počas vyhadzovania (Obrázok 33). Takýto diagram je dobre známy v teórii uzlov. Jedna dymová stopa reprezentuje jedno vlákno. Pre popis uzlu u používame slovo pozostávajúce zo symbolov σ_i, ktoré znamená zámenu vláken i a $i+1$, kde vlákno i ide ponad vlákno $i+1$. σ_i^{-1} znamená, že vlákno i ide popod vlákno $i+1$. Počet symbolov je rovný počtu zmien a v každom kroku sa udeje práve jedna zmena (jedno prekríženie vláken). To znamená, že v každom kroku sa vymení pozícia dvoch loptičiek, prekrížia sa dve stopy. V praktickom žonglovaní teda prechádza prvá loptička ponad, alebo popod druhú, rovnako ako ich dymové stopy. Vytvorený diagram nám presne popisuje zmeny pozícií loptičiek počas celého žonglovania. Na súvis medzi



Obr. 33: Na diagrame je príklad uzlu 4 loptičiek $\sigma_1^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_3^{-1}$. Žonglér je akoby postavený oproti stene vľavo a kráča vzad (vpravo v diagrame)

uzlami a žonglovaním poukazuje výsledok, že každý konečný uzol sa dá žonglovať. Bližšie sa s touto teóriou čitateľ zoznámi v práci MACAULEY (6).

Change ringing v anglických a írskych kostoloch je tradičná hra na zvony, ako oslava Boha. Podobnosť so žonglovaním vo využívaní permutácii nám dáva zaujímavé prepojenie dvoch, na prvý pohľad, úplne rozličných činností. Zvonári sú rozmiestnení do kruhu a každý má zvon o inom tóne. Zvony označíme po rade číslami 1 až n. Na každú dobu zahrá jeden zvon. Ako prvé sa odohrá jedno kolo zvoniac postupne zvonmi 1 až n. V každom kole sa odohrá každý tón, to znamená, že každý zvonár udrie raz. Potom sa začína nové kolo. V každom kole sa poradie zvonov zmení najviac o jedno miesto. Ak v predošlom kole zvonili zvony nasledovne: 13425, v tomto kole môžeme urobiť zmenu napríklad na tretej a štvrtej pozícii: 13245. Hlavným cieľom zvonenia zmien je zazvoniť všetky možné zmeny - celý rozsah, a vrátiť sa do prvého kola. Pre 3 zvony existujú dve možnosti:

$123 \to 213 \to 231 \to 321 \to 312 \to 132 \to 123$ a opačne.

Pre viac zvonov existujú algoritmy ako zahrať celý rozsah. Na zahratie celého rozsahu je potrebné previesť $n!$ zmien. To je zrejmé z toho, že je potrebné prejsť všetky permutácie o n zvonoch. Počet všetkých siteswapov (až na cyklickú zámenu) o danej dĺžke n a n loptičkách je rovnaký ako počet zmien v celom rozsahu a to $n!$. Zostavme siteswapy zo zvonenia zmien tak, že prvému kolu zvonenia n zvonov bude odpovedať konštantný siteswap dĺžky n o n loptičkách. V každom nasledovnom kroku sa môžu vymeniť zvony na susedných pozíciách a v rovnakých úderoch prevedieme zámenu strán v siteswape. Prechodom všetkých zmien obdržíme všetky n-loptičkové site-

1234	1342	1423	4444	4552	4633
2143	3124	4132	5353	6334	7342
2413	3214	4312	5623	6424	7522
4231	2341	3421	7441	5551	6631
4321	2431	3241	7531	5641	6451
3412	4213	2314	6622	7423	5524
3142	4123	2134	6352	7333	5344
1324	1432	1243	4534	4642	4453

Tabuľka 1: Vzťah medzi žonglovaním zmien a siteswapmi o dĺžke 4.

swapy dĺžky n. V tabuľke 1 prechádzame všetky siteswapy dĺžky 4 o 4 loptičkách[36] pomocou zvonenia zmien algoritmom Plain Bob[37]. Na ľavej strane sú zmeny zvonov a napravo prislúchajúce siteswapy. Hľadaním rôznych algoritmov change ringingu sa nám otvárajú dvere do teórie grafov, hlavne do oblasti Hamiltonovských cyklov. Hlbšie poznatky a súvisloti v tejto oblasti sú spísané v POLSTER (8).

Žonglérskych trikov, pohybov a vôbec typov žonglovania je nespočet. Je preto obrovské množstvo možností, kam ďalej smerovať pozornosť. Či už ďalším zovšeobecnením nášho modelu, pridávaním pohybov ako napríklad kríženie rúk, rozdielnymi údermi pre viac žonglérov, alebo pohľadom geometrickým na vzory, ktoré sú vytvorené pri žonglovaní skupiny ľudí meniacich svoje pozície, prípadne v kontaktnom žonglovaní, užívajúc krištáľové gule na skladanie rôznych obrazcov v priestore. Mohli by sme taktiež ďalej aplikovať výsledky teórie uzlov a zvonenia zmien. A v neposlednom rade hľadať súvislosti medzi týmito prístupmi.

[36]Príloha A - /siteswapy/27_permutacie_4lopticky/
[37]Na zvonenie zmien existuje viac algoritmov, Plain Bob patrí medzi najjednoduchšie.

Literatúra

[1] BEEK, J. - LEWBEL, A.: The Science of Juggling. In: *Scientific American*, 1995, vol. 273, no. 5, p. 92-97.
Dostupné z URL: `https://www2.bc.edu/~lewbel/jugweb/science-1.html`

[2] BUHLER, J. - EISENBUD, D.- -GRAHAM, R. - WRIGHT, C.: Juggling drops and descents. In: *Amer. Math. Monthly*, 1994, vol. 101, no. 6, p. 507-519.
Dostupné z URL: `http://www.ams.org/mathscinet-getitem?mr=1274973`

[3] HALL, M.: A combinatorial problem on abelian groups. In: *Proc. Amer. Soc.*, 1950-, vol. 3, p. 584-587.
Dostupné z URL: `http://www.ams.org/journals/proc/1952-003-04/S0002-9939-1952-0050579-7/S0002-9939-1952-0050579-7.pdf`

[4] HALL, M.: *Combinatorial theory.* New York: John Wiley & Sons, 1986, ISBN 0-471-09138-3

[5] LEWBEL, A.: *Research in Juggling History* [online]. c1995, last revision March 2002
Dostupné z URL: `https://www2.bc.edu/~lewbel/jugweb/history-1.html`

[6] MACAULEY, M.: *Braids and Juggling Patterns.* Claremont, 2003. 51 p. Senior thesis, Harvey Mudd College. Advisor: Michael Orrison
Dostupné z URL: `http://www.math.hmc.edu/seniorthesis/archives/2003/mmacaule/mmacaule-2003-thesis.pdf`

[7] MAYS, A.: *Combinatorial aspects of juggling.* Melbourne, 2006. 60 p. Honours thesis, Departments of Mathematics and Statistics, University of Melbourne. Supervisor: Dr. Peter Forrester
Dostupné z URL: `http://www.ms.unimelb.edu.au/~amays/juggling%20thesis_Mays.pdf`

[8] POLSTER, B.: *The Mathematics of Juggling.* New York: Springer - Verlag, 2003. 226 p., ISBN 0-387-95513-5

[9] SHANNON, C.E. - SLOANE, N. - WYNER, A.: Scientific aspects of juggling. In: *Claude Elwood Shannon: Collected papers.* New York: IEEE Press, 1993, p. 850-864.

[10] TAYLOR, G.: *A juggling theorem* [online]. c2011 Dostupné z URL: `http://tartarus.org/gareth/maths/stuff/juggling_theorem.pdf`

[11] ZIETHEN, K.H. - SERENA, A.: *Virtuosos of juggling: From the Ming Dynasty to Cirque du Soleil.* China: Palace Press International, 2003. 156 p., ISBN 0-9741848-0-2

Webové stránky zaoberajúce sa problematikou matematiky žonglovania:

`http://www.juggling.org/jw/`

`http://www.siteswapgeneration.com/`

Newsgroup:

`groups.google.com/group/rec.juggling/`

Zoznam príloh

Príloha A: CD médium

K bakalárskej práci je priložené CD médium s nasledujúcim obsahom:

- software *JugglingLab-0.6.1* v rovnomennom súbore obsahujúc originálny návod k inštalácii a používaniu a dokumentáciu
- animácie siteswapov použitých v texte, v zložke /siteswapy/, cesty k súborom sú poznačené v poznámkach pod čiarov pri danom siteswape
- súbory .nb (Mathematica notebook) vytvorené v programe *Wolfram Mathematica 8 for Students* na tvorbu základných a cyklických diagramov v zložke /diagramy/:
  - zakl_diagram.nb: Po spustení notebooku môže užívateľ zadať jeden až tri platné siteswapy rovnakej dĺžky. Postupnosti je potrebné písať do množinových zátvoriek, oddeľujúc každé číslo čiarkou (pre výšky hodov väčšie než 10 používame taktiež číselné značenie). Ak chce užívateľ vytvoriť diagram pre menej siteswapov, nevloží do množinových zátvoriek pri definícii ostatných postupností žiaden znak. Po kliknutí na Menu → Evaluate → Evaluate Notebook sa po prepočte vytvorí základný diagram. Prvý siteswap je vykreslený modrou, druhý červenou a tretí zelenou farbou.
  - cykl_diagram.nb: Notebook funguje na rovnako ako zakl_diagram.nb, výstupom je ale cyklický diagram.
  - generator_cyklickych_diagramov.nb: Po spustení súboru vloží užívateľ do prvého poľa platný siteswap rovnako ako v predošlých súboroch. Po výpočte sa v tabuľke objavia všetky generátory postupností o dĺžke vloženého siteswapu a počet možností.